

Министерство образования и науки Российской Федерации  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
ФАКУЛЬТЕТ ПРОБЛЕМ ФИЗИКИ И ЭНЕРГЕТИКИ  
КАФЕДРА ПЛАЗМЕННОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

На правах рукописи  
УДК 533.9 + 537.2

МУНИРОВ ВАДИМ РУСТАМОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕРАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННЫХ  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАКРОЧАСТИЦ

Магистерская диссертация

Направление подготовки 010900 «Прикладные математика и физика»

Магистерская программа 010972 «Плазменная энергетика»

Зам. заведующего кафедрой \_\_\_\_\_

Б.М. Сафонов

Научный руководитель \_\_\_\_\_

А.В. Филиппов

Студент \_\_\_\_\_

В.Р. Муниров

г. Долгопрудный

2013

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Взаимодействие сферической частицы с точечным зарядом в плазме</b>	<b>4</b>
2.1 Распределение потенциала . . . . .	4
2.2 Сила и потенциал взаимодействия . . . . .	8
2.3 Момент сил, действующих на макрочастицу . . . . .	11
2.4 Результаты . . . . .	12
2.5 Вращение пылевых частиц . . . . .	15
<b>3 Взаимодействие двух сферических частиц</b>	<b>17</b>
3.1 Распределение потенциала . . . . .	17
3.2 Вычисление силы взаимодействия . . . . .	22
3.3 Притяжение и отталкивание одноименно заряженных частиц . . . . .	24
<b>4 Заключение</b>	<b>36</b>
Приложение А . . . . .	37
Приложение В . . . . .	37
Приложение С . . . . .	44
Приложение D . . . . .	44
Приложение Е . . . . .	49
Список литературы . . . . .	50

# 1 Введение

Электростатическое взаимодействие заряженных диэлектрических или проводящих частиц играет важную роль во многих областях науки и техники. Потенциал взаимодействия двух частиц имеет большое значение для физики пылевой плазмы [1–5]. Он даёт условия фазовых переходов, дисперсию пылеакустических волн, коэффициенты переноса, скорость коагуляции частиц пыли и т.д. Электростатическое взаимодействие определяет характер многих процессов: коагуляция капелек жидкости в облаках, коагуляция в коллоидных суспензиях, взаимодействие частиц тонера принтера [6] и экранов электрофоретических дисплеев, взаимодействие между биополимерами, например, молекулами протеина [7], взаимодействие между бактериями [8]. Эффекты поляризации важны для понимания многих молекулярных механизмов наnano- и микромасштабах, таких как сольватация биомолекул и проникновение ионов через каналы в мембранах [9, 10].

Основным уравнением, определяющим взаимодействие частиц, является уравнение Лапласа или уравнение Пуассона-Больцмана, если учитывать экранирующую среду (плазму). Получение общего аналитического решения для двух диэлектрических частиц, находящихся в экранирующей среде, является довольно трудоёмкой задачей. Поэтому зачастую задачу упрощают тем или иным образом. Например, рассматривают взаимодействие частиц конечного размера и точечной или же ограничиваются рассмотрением взаимодействия частиц из металлического материала, что является частным случаем взаимодействия диэлектрических частиц при их диэлектрической проницаемости, устремленной к бесконечности. Частицы обычно считают равномерно заряженными, а то и вовсе незаряженными, но помещенными во внешнее поле. В настоящей работе аналитически рассматривается взаимодействие произвольно заряженных частиц, помещенных во внешнее электрическое поле и диэлектрическую среду. Вначале эта система исследуется в плазме, однако, ввиду вышеупомянутых трудностей, одна из частиц считается точечной. Из произведенного рассмотрения становится ясным, что в случае умеренной экранировки основную роль во взаимодействии на малых расстояниях играют поляризационные эффекты, связанные с конечным размером макрочастиц, поэтому имеет смысл рассмотреть взаимодействие двух частиц конечного размера, но уже без плазмы, которое определяется уравнением Лапласа.

Приведём краткий обзор работ, в которых в том или ином виде решались похожие задачи, чтобы продемонстрировать основные методы решения. В работах [11–13] задача решается в бисферических координатах. В [14, 15] задача для двух заряженных сферических частиц решалась в сферической системе координат методом переразложения полиномов Лежандра с полюсом в центре одной из частиц по полиномам Лежандра с полюсом в центре другой частицы. В работах [16–18] используется метод изображений. Также представляет интерес вариационный метод [10, 19]. Привлекаются и численные методы, например, метод конечных элементов Галеркина [6], метод Монте-Карло [20]. Эти же методы применялись для исследования металлических частиц [21–36]. Одна-

ко, представленные выше работы либо имеют ограниченную применимость (нигде не рассматривается произвольное распределение заряда), либо имеют ограниченную сходимость.

Работа организована следующим образом. В первой части мы рассматриваем электростатическое взаимодействие произвольно заряженной сферической частицы и точечного заряда в плазме в присутствии внешнего постоянного и однородного поля. Мы находим распределение потенциала во всем пространстве, силу и потенциальную энергию взаимодействия между частицами, а также момент сил, действующих на сферическую частицу. Подробно обсуждаем эффекты, связанные с неравномерностью распределения заряда, в частности, проводится оценка скорости вращения пылевых частиц в плазме. Во второй части исследуется взаимодействие двух неравномерно заряженных диэлектрических сфер с использованием бисферических координат в присутствии внешнего поля. Выводятся аналитические выражения для потенциала и силы взаимодействия и с их помощью определяется область параметров задачи, при которых между двумя сферами наблюдается притяжение. Везде при рассмотрении мы будем в первую очередь применять нашу систему к физике пылевой плазмы.

## 2 Взаимодействие сферической частицы с точечным зарядом в плазме

В первой части мы рассмотрим электростатическое взаимодействие произвольно заряженной сферической частицы и точечного заряда в плазме в присутствии внешнего постоянного и однородного поля. Мы найдем распределение потенциала во всем пространстве, силу и потенциальную энергию взаимодействия между частицами, и момент сил, действующих на сферическую частицу. Мы также применим полученные формулы для исследования вращения пылевых частиц в плазме.

### 2.1 Распределение потенциала

Пусть в плазме имеется сферическая макрочастица радиуса  $a_1$  и с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  и точечная частица с зарядом  $q_2$ . В лабораторных условиях пылевые частицы обычно левитируют в областях с достаточно сильным электрическим полем, компенсирующим действие силы тяжести, поэтому в рассмотрение включим и постоянное электрическое поле  $\mathbf{E}_0$ . Выберем центр декартовой системы координат в центре макрочастицы и направим ось  $z$  вдоль линии, соединяющей центры частиц, а ось  $x$  направим так, чтобы вектор  $\mathbf{E}_0$  лежал в плоскости  $xz$ . Также введем сферические координаты так, как показано на рисунке 1.

Теперь перейдем к решению электростатической задачи для нашей системы, то есть найдем распределение электростатического потенциала во всем пространстве.

Положим, что в области I ( $r < a_1$ ) нет свободных объемных зарядов, поэтому по-

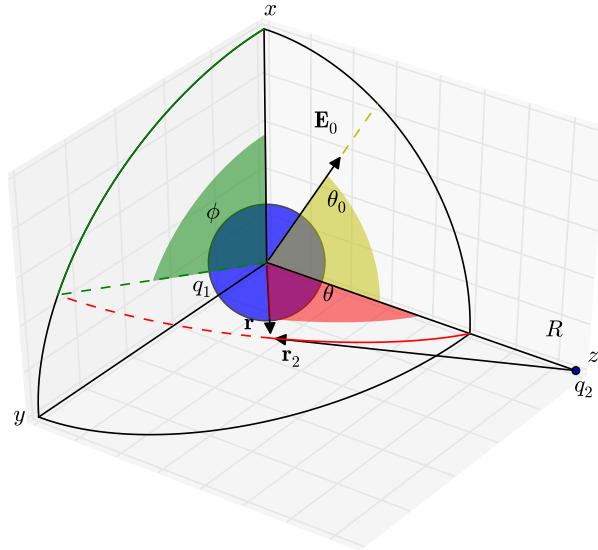


Рис. 1: Геометрия задачи о взаимодействии точечного заряда с макрочастицей:  $r, \theta, \varphi$  – координаты точки наблюдения в сферической системе координат с началом в центре макрочастицы;  $r_2, \theta_2, \varphi$  – координаты точки наблюдения в сферической системе координат с началом в точке нахождения точечного заряда;  $R$  – межчастичное расстояние;  $q_1, q_2$  – заряды частиц в элементарных зарядах;  $\mathbf{E}_0$  – вектор напряженности постоянного электрического поля, лежащий в плоскости  $xz$ ;  $\theta_0$  – угол, задающий направление  $\mathbf{E}_0$  в сферической системе координат с началом в центре макрочастицы;  $\beta$  – угол между векторами  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{r}$ .

тенциал электрического поля в этой области определяется уравнением Лапласа [37]:

$$\Delta\phi_I = 0. \quad (1)$$

В области II ( $r > a_1$ ) самосогласованный потенциал макрочастицы и плазмы будем искать на основе линеаризованного уравнения Пуассона-Больцмана [38]:

$$\Delta\phi_I - k_D^2\phi_I = 0, \quad (2)$$

где  $k_D$  – обратный дебаевский радиус. Вследствие линейности рассматриваемой задачи, суммарный потенциал можно представить в виде:

$$\phi = \begin{cases} \phi_I & \text{в области I;} \\ \phi_{II} \equiv \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 & \text{в области II;} \end{cases} \quad (3)$$

где  $\phi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} = -E_0 r \cos \beta$  – потенциал постоянного электрического поля,  $\beta$  – угол между векторами  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{r}$ , а  $\phi_2$  – самосогласованный потенциал точечной частицы в плазме. Как известно, в равновесной плазме потенциал точечной частицы является дебаевским [38]:

$$\phi_2(r_2) = \frac{q_2}{\varepsilon r_2} e^{-k_D r_2}. \quad (4)$$

Отметим, что в плазме  $\varepsilon \simeq 1$ , но в электролитах или биологических системах диэлек-

трическая проницаемость среды  $\varepsilon$  может отличаться от единицы.

Границные условия для нашей задачи имеют вид [37]:

$$\phi_I|_{r=a_1} = (\phi_0 + \phi_1 + \phi_2)|_{r=a_1}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial r}|_{r=a_1-0} - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r}|_{r=a_1+0} = 4\pi\sigma(\theta, \varphi), \quad (6)$$

где  $\sigma$  – плотность поверхностного заряда (свободного) макрочастицы.

Как известно, решения уравнений (1) и (2), конечные в нуле и обращающиеся в нуль на бесконечности, в сферических координатах имеют вид [37, 39]:

$$\begin{aligned} \phi_I(r, \theta, \varphi) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\varphi + C_n^{-m} \sin m\varphi) \\ & \times P_n^m(\cos \theta) r^n, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, \varphi) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\varphi + A_n^{-m} \sin m\varphi) \\ & \times P_n^m(\cos \theta) \frac{K_{n+1/2}(k_D r)}{\sqrt{r}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $K_{n+1/2}$  – модифицированные функции Бесселя второго рода или функции Макдональда полуцелого порядка,  $P_n^m$  – присоединенные полиномы Лежандра. Отметим, что всюду в настоящей работе присоединенные полиномы Лежандра определены без учета фактора Шортли-Кондона (например,  $P_1^1 = \sin \theta$ ).

Разложим распределение потенциала точечного заряда в плазме (4) по полиномам Лежандра, используя формулу Макдональда [39], которая при  $r \leq R$  имеет вид:

$$\frac{\exp(-\tilde{r}_2)}{r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) \frac{I_{n+1/2}(\tilde{r}) K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{r}\tilde{R}}, \quad (9)$$

где  $I_{n+1/2}$  – модифицированные функции Бесселя первого рода или функции Инфельда полуцелого порядка,  $r_2 = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}$ ,  $\tilde{r} = k_D r$ ,  $\tilde{R} = k_D R$ . Потенциал постоянного поля раскладывается следующим образом:

$$\phi_0 = -E_0 r [\cos \theta_0 P_1^0(\cos \theta) + \sin \theta_0 \cos \varphi P_1^1(\cos \theta)], \quad (10)$$

здесь  $\theta_0$  задает направление вектора  $\mathbf{E}_0$  в нашей сферической системе координат (отметим, что вследствие нашего выбора системы координат, для  $\mathbf{E}_0$  азимутальный угол  $\varphi_0 = 0$ , см. рисунок 1).

Плотность поверхностного заряда макрочастицы также разложим по сферическим

гармоникам:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\sigma_n^m \cos m\varphi + \sigma_n^{-m} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (11)$$

где связь коэффициентов разложения  $\sigma_n^{\pm m}$  с поверхностным распределением заряда  $\sigma(\theta, \varphi)$  имеет вид:

$$\sigma_n^{\pm m} = \frac{2n+1}{2\pi(1+\delta_{m,0})} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (12)$$

(здесь  $\delta_{m,0}$  – символ Кронекера).

В итоге, из первого граничного условия (5) находим:

$$C_n^0 = A_n^0 \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{n+1/2}} + q_2(2n+1) \frac{I_{n+1/2}(a_1) K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\varepsilon a_1^{n+1/2} \sqrt{R}}, \quad (13)$$

$$n = 0, 2, 3, \dots$$

$$C_1^0 = A_1^0 \frac{K_{3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}} + 3q_2 \frac{I_{3/2}(a_1) K_{3/2}(\tilde{R})}{\varepsilon a_1^{3/2} \sqrt{R}} - E_0 \cos \theta_0, \quad (14)$$

$$C_1^1 = A_1^1 \frac{K_{3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}} - E_0 \sin \theta_0, \quad (15)$$

$$C_n^{\pm m} = A_n^{\pm m} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{n+1/2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$m = 1, 2, \dots, n.$$

Из второго граничного условия (6), используя (13-16), получаем:

$$A_1^0 = \frac{3q_2}{\varepsilon \sqrt{R}} K_{3/2}(\tilde{R}) M_{3/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) + \frac{[4\pi\sigma_1^0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon) E_0 \cos \theta_0] a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (17)$$

$$A_n^0 = \frac{(2n+1)q_2}{\varepsilon \sqrt{R}} K_{n+1/2}(\tilde{R}) M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) + \frac{4\pi\sigma_n^0 a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (18)$$

$$n = 0, 2, 3, \dots$$

$$A_1^1 = \frac{[4\pi\sigma_1^1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon) E_0 \sin \theta_0] a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (19)$$

$$A_n^{\pm m} = \frac{4\pi\sigma_n^{\pm m} a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}, \quad n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Здесь для удобства введена функция

$$M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{\varepsilon \tilde{a}_1 I_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon - \varepsilon_1) n I_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (21)$$

Таким образом, мы выразили в явном виде коэффициенты разложения потенциалов (7, 8) через известные параметры задачи, что и решает нашу электростатическую задачу.

## 2.2 Сила и потенциал взаимодействия

Потенциал взаимодействия макрочастиц в изотермической плазме с постоянным числом электронов и ионов совпадает со свободной энергией [40, 41], для нахождения которой сначала вычислим силу взаимодействия. Сила, действующая на точечную заряженную частицу со стороны второй частицы конечного размера, вычисляется просто (здесь мы не рассматриваем силу, действующую на макрочастицу со стороны постоянного электрического поля, равную  $q_1 \mathbf{E}_0$ , так как полагаем, что она уравновешена силой тяжести):

$$\mathbf{F} = -q_2 \nabla \phi_1 \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=0}} = -q_2 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right) \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=0}}. \quad (22)$$

Используя выражение (8), отсюда после несложных преобразований находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = q_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^0}{R^{\frac{3}{2}}} & \left[ (n+1) K_{n+1/2}(\tilde{R}) + \tilde{R} K_{n-1/2}(\tilde{R}) \right] \mathbf{e}_z - \\ & - q_2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 \frac{n(n+1)}{2} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{R^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_x - q_2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-1} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{R^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как потенциал взаимодействия не зависит от пути интегрирования, то интегрируя  $z$  компоненту силы (23) по межчастичному расстоянию получим выражение для потенциала взаимодействия (см. приложение А):

$$U(R, \theta_0) = q_2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{R}}. \quad (24)$$

Подставив выражения для коэффициентов  $A_n^0$  из (17) и (18) получаем

$$\begin{aligned}
U(R, \theta_0) = & U_{\text{DLVO}} + U_{E_0} \cos \theta_0 + \\
& + \frac{4\pi a_1^2 q_2}{\sqrt{Ra_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^0 K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} + \\
& + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) K_{n+1/2}^2(\tilde{R}) M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1), \quad (25)
\end{aligned}$$

где  $U_{\text{DLVO}}$  – потенциал Дерягина-Ландау-Фервея-Овербика (ДЛФО-потенциал) (см., например в [28]):

$$U_{\text{DLVO}} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R (1 + k_D a_1)} e^{-k_D (R - a_1)} \equiv \frac{q_1 \text{eff} q_2}{\varepsilon R} e^{-\tilde{R}}, \quad (26)$$

$U_{E_0}$  – потенциал взаимодействия наведенного постоянным внешним электрическим полем поверхностного заряда с точечным зарядом:

$$U_{E_0} = \frac{a_1^2 q_2}{\sqrt{Ra_1}} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon) E_0 K_{3/2}(\tilde{R})}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (27)$$

Третий член в выражении (25) есть вклад взаимодействия неоднородного поверхностного заряда с точечным зарядом, четвертый – вклад взаимодействия точечного заряда с наведенным им же поверхностным зарядом.

Для потенциала взаимодействия точечной частицы и равномерно заряженной макрочастицы  $\sigma_0^0 = q_1 / (4\pi a_1^2)$  при  $E_0 = 0$  получим:

$$U(R) = U_{\text{DLVO}} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \left[ \frac{I_{3/2}(\tilde{a}_1)}{K_{3/2}(\tilde{a}_1)} K_{1/2}^2(\tilde{R}) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) K_{n+1/2}^2(\tilde{R}) M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) \right], \quad (28)$$

Заметим, что в случае  $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ , т.е. если макрочастица является проводником, из (28) следует:

$$U(R) = U_{\text{DLVO}} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \left[ \frac{I_{3/2}(\tilde{a}_1)}{K_{3/2}(\tilde{a}_1)} K_{1/2}^2(\tilde{R}) - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) K_{n+1/2}^2(\tilde{R}) \frac{I_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} \right],$$

которая при  $\varepsilon = 1$  переходит в формулу для потенциала взаимодействия проводящей сферы и точечного заряда из работы [28].

Если рассматривать взаимодействие в отсутствие плазмы при  $k_D = 0$ , то, учитывая разложение модифицированных функций Бесселя при малых аргументах (см. [39]), из (22) и (28) находим:

$$F \equiv F_z = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} + \frac{q_2^2}{\varepsilon R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(\varepsilon - \varepsilon_1)}{(n+1)\varepsilon + n\varepsilon_1} \left( \frac{a_1}{R} \right)^{2n+1}, \quad (29)$$

$$U(R) = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1) n}{(n+1)\varepsilon + n\varepsilon_1} \left(\frac{a_1}{R}\right)^{2n+1}. \quad (30)$$

Эти выражения совпадают с выражениями для силы и потенциала взаимодействия точечного заряда с диэлектрическим шаром в однородном диэлектрике [37].

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда на поверхности макрочастицы имеется неоднородное распределение заряда. Неравномерное распределение заряда может поддерживаться, например, в процессе фотоэмиссионной зарядки пылевых частиц внешним источником ультрафиолетового излучения или на пылевых частицах, левитирующих в приэлектродном слое ВЧ-разряда, в катодном слое или стратах в разрядах постоянного тока, где формируются электростатические ловушки для пылевых частиц и имеются сильнонаправленные ионные потоки.

Поскольку заряд на макрочастице формируется потоками электронов и ионов, асимметричность которых вызвана действием электрического поля в области левитации макрочастицы, то положим, что распределение заряда аксиально симметрично вдоль направления вектора напряженности постоянного электрического поля:

$$\sigma(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(\cos \beta).$$

Пользуясь теоремой сложения для многочленов Лежандра [42], для такого распределения заряда находим:

$$\begin{aligned} \sigma_n^0 &= \sigma_n P_n(\cos \theta_0), \\ \sigma_n^m &= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sigma_n P_n^m(\cos \theta_0), \\ \sigma_n^{-m} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots n. \end{aligned} \quad (31)$$

Для распределения заряда с преобладанием монопольного и дипольного моментов, т.е. когда  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos \beta$  из выражений (23) и (25) находим (отметим, что  $F_y \equiv 0$  для любого аксиально симметрично вдоль направления вектора напряженности постоянного электрического поля распределения заряда, а выражение для  $z$ -составляющей силы легко получается из (22)):

$$F_x = -\frac{q_2 K_{3/2}(\tilde{R}) \sin \theta_0 a_1^{3/2}}{R^{3/2}} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon) E_0 + 4\pi\sigma_1}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} U(R, \theta_0) &= U_{DLVO} + (U_{E0} + U_{\sigma1}) \cos \theta_0 + \\ &+ \frac{q_2^2}{2\varepsilon R} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) K_{n+1/2}^2(\tilde{R}) M_{n+1/2}(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$U_{\sigma_1} = \frac{q_2}{\sqrt{Ra_1}} \frac{4\pi a_1^2 \sigma_1 K_{3/2}(\tilde{R})}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (34)$$

### 2.3 Момент сил, действующих на макрочастицу

В предположении, что среда находится в механическом и тепловом равновесии, на элемент поверхности диэлектрика действует удельный момент сил [43]:

$$\mathbf{m} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\{ [\mathbf{r} \times \mathbf{E}] (\mathbf{n} \mathbf{E}) - \frac{1}{2} E^2 [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] \right\}. \quad (35)$$

Используя рекуррентные соотношения для присоединенных многочленов Лежандра и их производных [42], для проекций моментов на декартовы оси находим (см. приложение B):

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi m_x(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{4}{3}\pi a_1^3 \sigma_1^{-1} E_0 \cos \theta_0 \frac{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)} - \\ &\quad - \frac{q_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi n(n+1) \sigma_n^{-1} a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{R}}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi m_y(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{4}{3}\pi a_1^3 E_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) \frac{\varepsilon (\sigma_1^0 \sin \theta_0 - \sigma_1^1 \cos \theta_0)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)} + \\ &\quad + \frac{q_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{4\pi \sigma_n^1 a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{R}}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$M_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi m_z(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = - \frac{\frac{4}{3}\pi a_1^3 \varepsilon \sigma_1^{-1} E_0 \sin \theta_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (38)$$

В случае аксиально-симметричного (вдоль направления внешнего поля) распределения свободного заряда по поверхности пылевой частицы из (36, 38) имеем:

$$M_x = M_z = 0,$$

а выражение для момента вдоль оси  $y$  примет вид:

$$M_y = \frac{q_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi n(n+1)\sigma_n^1 a_1^{3/2}}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} \frac{K_{n+1/2}\left(\tilde{R}\right)}{\sqrt{R}}. \quad (39)$$

При действии только внешнего поля ( $q_2 = 0$ ) из (36-38) находим:

$$M_x = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \frac{\varepsilon\sigma_1^{-1} E_0 \cos \theta_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (40)$$

$$M_y = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \frac{\varepsilon E_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) (\sigma_1^0 \sin \theta_0 - \sigma_1^1 \cos \theta_0)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (41)$$

$$M_z = -\frac{4}{3}\pi a_1^3 \frac{\varepsilon \sigma_1^{-1} E_0 \sin \theta_0 \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\varepsilon \tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) K_{3/2}(\tilde{a}_1)}. \quad (42)$$

## 2.4 Результаты

На рисунках 2–3 изображены зависимости от  $L = R - a_1$ , наименьшего расстояния между поверхностью макрочастицы и точечным зарядом, потенциальной энергии взаимодействия при различных режимах экранирования (далее рассматривается только плазменная среда, поэтому принято, что  $\epsilon = 1$ ). Полагалось, что свободный заряд однородно распределен по поверхности макрочастицы. Расчеты показали, что потенциал взаимодействия в случае проводящей макрочастицы с  $\epsilon_1 = \infty$  практически не отличается от потенциала для частицы с  $\epsilon_1 = 81$  на всех межчастичных расстояниях.

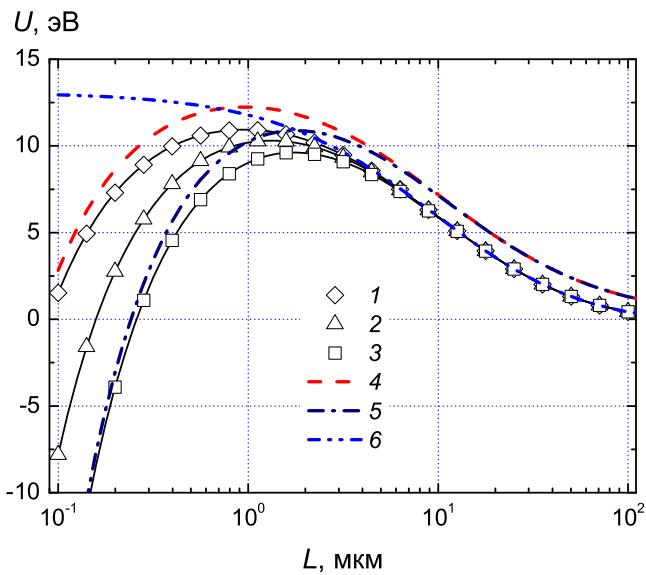


Рис. 2: Зависимость потенциальной энергии взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом для  $q_1 = 10^3 e$ ,  $a_1 = 10 \text{ мкм}$ ,  $q_2 = 10^2 e$ ,  $k_D^{-1} = 50 \text{ мкм}$ ,  $\varepsilon = 1$  от  $L$  при различных значениях диэлектрической проницаемости: 1 –  $\varepsilon_1 = 2$ , 2 –  $\varepsilon_1 = 4$ , 3 –  $\varepsilon_1 = 81$ . Сплошные линии – расчет из (33), точки – формула (43), 4 – (30) при  $\varepsilon_1 = 2$ , 5 – (30) при  $\varepsilon_1 = \infty$ , 6 – DLVO-потенциал (26).

Из рисунках 2–3 видно, что на малых расстояниях между одноименно заряженной сферической макрочастицей и точечным зарядом отталкивание переходит в притяжение.

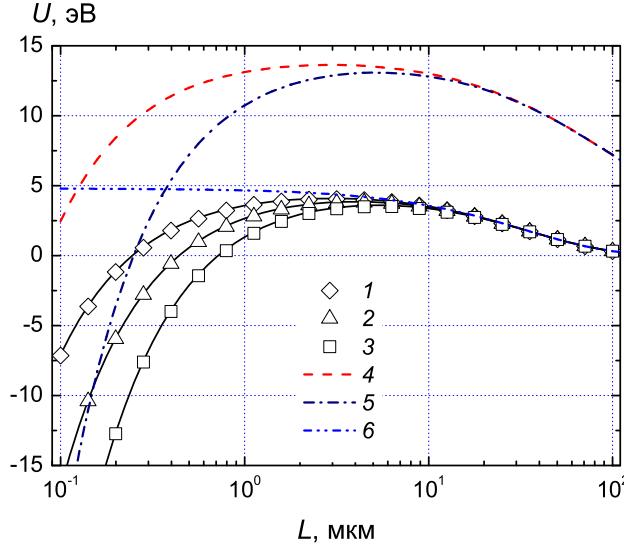


Рис. 3: Зависимость потенциальной энергии взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом для  $q_1 = 10^4 e$ ,  $a_1 = 100$  мкм,  $q_2 = 10^2 e$ ,  $k_D^{-1} = 50$  мкм от  $L$  при различных значениях диэлектрической проницаемости: 1 –  $\epsilon_1 = 2$ , 2 –  $\epsilon_1 = 4$ , 3 –  $\epsilon_1 = 81$ . Сплошные линии – расчет из (33), точки – формула (43), 4 – (30) при  $\epsilon_1 = 2$ , 5 – (30) при  $\epsilon_1 = \infty$ , 6 – DLVO-потенциал (26).

жение, причем при больших значениях диэлектрической проницаемости этот переход происходит на больших межчастичных расстояниях. При расчетах учитывались первые  $10^4$  членов разложения по полиномам Лежандра (заметим, что такое количество членов требовалось только при  $L = 0.1$  мкм, при этом первый отбрасываемый член был в  $10^{31}$  раз меньше самого потенциала взаимодействия. С ростом межчастичного расстояния число необходимых для достижения указанной точности членов быстро уменьшается). Как уже отмечалось в работе [28], что несмотря на больший (в 10 раз) заряд макрочастицы в расчетах в плазме с более сильным экранированием, энергия взаимодействия в максимуме оказывается меньше, чем в менее плотной плазме. Это является следствием влияния как размера макрочастиц (сравнить кривые 4, 5 на рис. 2 и 3), так и плазменного экранирования ( $U_{\text{DLVO}}|_{L=0}$  равен 4.8 эВ при более сильном экранировании и 12.9 эВ при более слабом).

На рисунках 2–3 приведены также кривые, рассчитанные с использованием выражения

$$U_a(R) = U_{\text{DLVO}}(R) + \left(\frac{a_1}{R}\right)^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon}{\epsilon_1 + 2\epsilon} a_1 q_2 E_0 \cos \theta_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1}{R}\right)^{n+1} \frac{q_2}{(n+1)\epsilon + n\epsilon_1} \left[ 4\pi a_1 \sigma_n^0 + \frac{q_2}{2\epsilon R} (\epsilon - \epsilon_1) n \right], \quad (43)$$

которое получено из (25) с сохранением эффектов экранирования только в DLVO-потенциале. Видно, что выражение (43) в данном случае хорошо описывает потенциальную энергию взаимодействия в плазме на всех расстояниях.

Теперь перейдем к неоднородному распределению свободного заряда по поверхно-

сти макрочастицы, а именно к случаю распределения, аксиально симметричного вдоль направления внешнего электрического поля. Для простоты рассмотрим случай, когда важны только монопольный и дипольный члены разложения поверхности заряда. В этом случае из (32) видно, что составляющая силы вдоль оси  $x$  отлична от нуля. Эта сила стремится повернуть точечный заряд так, чтобы направление прямой, соединяющей две частицы, совпало с направлением внешнего электрического поля. В этом положении ( $\theta_0 = 0$  или  $\pi$ ) потенциал взаимодействия (33) имеет экстремальное значение как функция ( $\theta_0$ ): при одном значении  $\theta_0$  будет максимум, а при другом – минимум. Где именно будет находиться максимум, а где минимум, зависит как от знаков  $q_2$  и  $\sigma_1$ , так и от значений  $E_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\varepsilon_1$ .

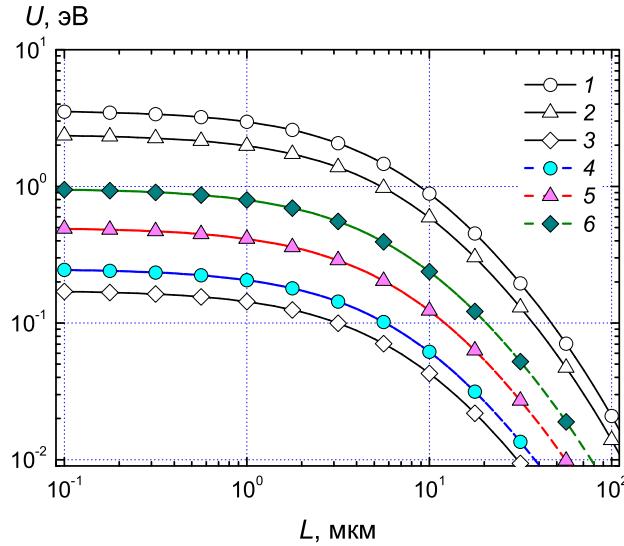


Рис. 4: Зависимость потенциала взаимодействия неоднородного поверхностного заряда с точечным зарядом (34) (кривые 1–3) и и наведенного постоянным внешним электрическим полем поверхностного заряда с точечным зарядом (27) (кривые 4–6) для  $q_1 = 10^3 e$ ,  $a_1 = 10$  мкм,  $q_2 = 10^2 e$ ,  $k_D^{-1} = 100$  мкм,  $E_0 = 10$  В/см,  $\sigma_1 = \sigma_0 = q_1 / (4\pi a_1^2)$  от  $L$  при различных значениях диэлектрической проницаемости: (1,4) –  $\varepsilon_1 = 2$ ; (2,5) –  $\varepsilon_1 = 4$ ; (3,6) –  $\varepsilon_1 = 81$ .

На рисунке 4 приведены зависимости  $U_{E_0}(L)$  и  $U_{\sigma_1}(L)$ , рассчитанные из (27) и (34), соответственно, при различных значениях диэлектрической проницаемости макрочастицы. Видно, что при малых  $\varepsilon_1$  более важным оказывается взаимодействие дипольного момента свободного заряда с точечным зарядом, а с ростом  $\varepsilon_1$  – взаимодействие наведенного постоянным внешним электрическим полем поверхностного заряда с точечным зарядом. Также отметим, что при малых  $\varepsilon_1$  величина  $U_{\sigma_1}$  сравнима с потенциалом взаимодействия точечного заряда с равномерно заряженным диэлектриком, поэтому должна учитываться при рассмотрении таких явлений как коагуляция пылевых частиц в плазме. А при больших  $\varepsilon_1$  становится не малой величина  $U_{E_0}$ .

В области левитации пылевых частиц поток положительных ионов плазмы направлен вдоль внешнего электрического поля, поэтому можно ожидать, что сторона поверхности макрочастицы, обращенная к потоку ионов будет захватывать больше ионов, чем противоположная сторона, а поток электронов на макрочастицу менее чувствителен к

внешнему полю и обычно более изотропен из-за высокой температуры электронов в разряде. Следовательно, дипольный момент распределения свободного заряда по поверхности макрочастицы будет иметь отрицательный знак как в случае отрицательного, так и положительного полного заряда. В этом случае члены  $U_{E_0}$  и  $U_{\sigma_1}$  в (33) будут иметь противоположные знаки и будут в некоторой степени компенсировать друг друга.

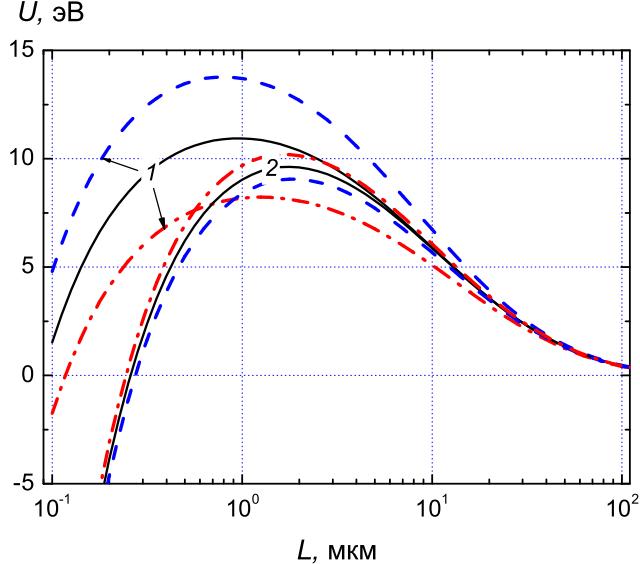


Рис. 5: Зависимости потенциала взаимодействия (33) макрочастицы с точечным зарядом для  $q_1 = -10^3 e$ ,  $a_1 = 10$  мкм,  $q_2 = -10^2 e$ ,  $k_D^{-1} = 100$  мкм,  $E_0 = 10$  В/см,  $\sigma_1 = \sigma_0 = q_1 / (4\pi a_1^2)$  от  $L$  при различных значениях диэлектрической проницаемости: (1) –  $\varepsilon_1 = 2$ ; (2) –  $\varepsilon_1 = 81$ . Сплошные кривые –  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ , пунктирные –  $\theta_0 = 0$ , штрих-пунктирные –  $\theta_0 = \pi$ .

На рисунке 5 представлены зависимости потенциала взаимодействия при ряде значений угла  $\theta_0$ , рассчитанные для отрицательно заряженной макрочастицы и отрицательного точечного заряда. Видно, что при малом значении  $\varepsilon_1 = 2$  при использованных в расчете значениях параметров задачи потенциал взаимодействия оказывается минимальным при  $\theta_0 = \pi$  и максимальным при  $\theta_0 = 0$ , а при  $\varepsilon_1 = 81$  все наоборот.

## 2.5 Вращение пылевых частиц

Воспользуемся полученными нами выражениями для определения момента сил, действующих на макрочастицу для обсуждения вращения пылевых частиц в пылевой плазме вокруг собственной оси, о котором сообщалось в работах [44–47]. В отсутствие магнитного поля можно ожидать, что распределение поверхностного заряда на пылевых частицах в среднем по времени будет аксиально симметричным вдоль направления внешнего электрического поля. Для такого распределения заряда из (40-42) следует, что

$$M_x = M_y = M_z = 0,$$

т.е. для аксиально-симметричного распределения поверхностного заряда момент сил, действующих на уединенную пылевую частицу в области ее левитации, будет равен

нулю, что находится в согласии с выводами работы [47] об отсутствии собственного вращения пылевых частиц сферической формы в разряде без магнитного поля. Отметим, что в случае пылевых частиц из проводящего материала все моменты также обращаются в нуль (во всех вышенназванных работах [44–47] исследовалось вращение только диэлектрических пылевых частиц).

При наложении магнитного поля аксиальная симметрия задачи нарушится и в этом случае возможно появление такого неоднородного распределения заряда, что  $\sigma_1^{-1}$  и, возможно,  $(\sigma_1^0 \sin \theta_0 - \sigma_1^1 \cos \theta_0)$  станут отличными от нуля. Покажем это качественно. Направим ось  $z$  вдоль направления  $E_0$  ( $\theta_0 = 0$ ), а ось  $x$  вдоль магнитного поля. В работе [47] индукция магнитного поля  $B$  не превышала 300 Гс; в таких полях электроны замагничены, а ионы – практически нет. Поэтому магнитное поле в условиях экспериментов [47] практически не влияло на ток ионов в слое (страте), а в скрещенных электрическом и магнитном полях имеется дрейфовый ток электронов, направленный вдоль векторного произведения  $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ , то есть вдоль направления оси  $y$ . Отметим, что при  $B \sim 300$  Гс этот ток заметно превосходит дрейфовый ток электронов вдоль электрического поля. Следовательно, мы можем написать, что поток ионов на макрочастицу в дипольном приближении будет описываться зависимостью  $J_i = J_{0i} - J_{1i} \cos \theta$ , а поток электронов с той же точностью – зависимостью  $J_e = J_{0e} + J_{1e} \sin \varphi$ .

Далее предположим, что плотность электронного заряда на поверхности пылевых частиц повторяет угловую зависимость потока электронов, а ионов – потока ионов, тогда

$$\sigma(\theta, \varphi) \approx \sigma_i + \sigma_e \sim \sigma_0 - \sigma_{1i} \cos \theta + \sigma_{1e} \sin \varphi.$$

Для такого распределения поверхностного заряда из (12) находим, что  $\sigma_1^0 = -\sigma_{1i}$ ,  $\sigma_1^1 = 0$  и  $\sigma_1^{-1} = \frac{3\pi}{8}\sigma_{1e}$ . Следовательно, как видно из (40-42), будет отличным от нуля только момент  $M_x$ . В режиме слабого экранирования для рассматриваемого случая находим:

$$M_x \approx \frac{3\pi^2 a_1^3 \sigma_{1e} E_0}{2(2 + \varepsilon_1)}. \quad (44)$$

Момент силы сопротивления газа для вращающейся сферической частицы согласно работе [48] определяется выражением:

$$M_{fr} = \frac{2\pi}{3} \varrho_{\text{gas}} v_{\text{th,gas}} \omega_{\text{rot}} a_1^4, \quad (45)$$

где  $\varrho_{\text{gas}}$  – плотность газа,  $v_{\text{th,gas}}$  – тепловая скорость частиц газа,  $\omega_{\text{rot}}$  – угловая скорость вращения пылевой частицы. Учтем условие левитации пылевых частиц

$$q_1 E_0 + m_d g = 0,$$

где  $m_d$  – масса пылевой частицы,  $g$  – ускорение свободного падения. Введем также параметр, определяющий степень анизотропности распределения заряда электронов по

поверхности пылевых частиц:

$$\zeta_{1e} = \frac{4\pi a_1^2 \sigma_{1e}}{q_1}.$$

В итоге, приравняв (45) и (44), для угловой скорости вращения пылевых частиц находим:

$$\omega_{\text{rot}} = -\frac{3\pi\zeta_{1e}}{4(2+\varepsilon_1)} \frac{\varrho_d}{\varrho_{\text{gas}}} \frac{g}{v_{\text{th,gas}}}. \quad (46)$$

где  $\varrho_d$  – плотность материала пылевой частицы. Интересно отметить, что в рассматриваемом приближении угловая скорость вращения зависит от параметров разряда только через параметр  $\zeta_{1e}$  и явно не зависит ни от размера пылевых частиц, ни от их заряда.

Проведем оценки угловой скорости собственного вращения пылевых частиц для условий экспериментов [47], где исследовалось вращение полых сферических частиц из стекла в неоне при давлении  $p = 0.15$  Торр. Положим, что

$$\zeta_{1e} = 10^{-2}, \quad T = 300 \text{ K}, \quad \varrho_d \sim 2 \text{ г/см}^3, \quad \varepsilon_1 \sim 6.$$

Из (46) находим, что угловая скорость вращения вокруг оси  $x$  (напомним, что мы ее направили вдоль направления вектора магнитной индукции)  $\omega_{\text{rot}} \sim 500$  рад/с. Такое значение угловой скорости и направление оси вращения согласуются с сообщаемыми в [47], причем такое большое значение обеспечивается всего лишь 1% анизотропией электронного заряда. Для более точного количественного сравнения необходимо более строгое рассмотрение распределения поверхностного заряда в экспериментах.

### 3 Взаимодействие двух сферических частиц

Во второй части работы рассмотрим взаимодействие двух сферических частиц конечного размера, неравномерно заряженных в присутствии внешнего поля. При этом плазму из нашего рассмотрения исключим. Мы найдем распределение электростатического потенциала во всем пространстве и силу взаимодействия между частицами. Подробно рассмотрим вопрос о взаимодействии равномерно заряженных частиц, а именно: определим при каких соотношениях между зарядами и радиусами одноименно заряженных частиц между ними наблюдается притяжение на малых расстояниях.

#### 3.1 Распределение потенциала

Рассмотрим две сферические частицы с радиусами  $a_1, a_2$ , с поверхностными зарядами  $\sigma_1, \sigma_2$ , которые в общем случае неравномерно распределены по их поверхностям, и с диэлектрическими постоянными  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , помещенные в однородный диэлектрик (проницаемостью  $\varepsilon$ ) и постоянное и однородное до введения частиц внешнее электрическое поле  $\mathbf{E}_0$ . Введем декартову систему координат так, чтобы вектор напряженности внешнего поля лежал в плоскости  $xz$ , а ось  $z$  направлена вдоль линии, соединяющей центры частиц (см. рисунок 6).

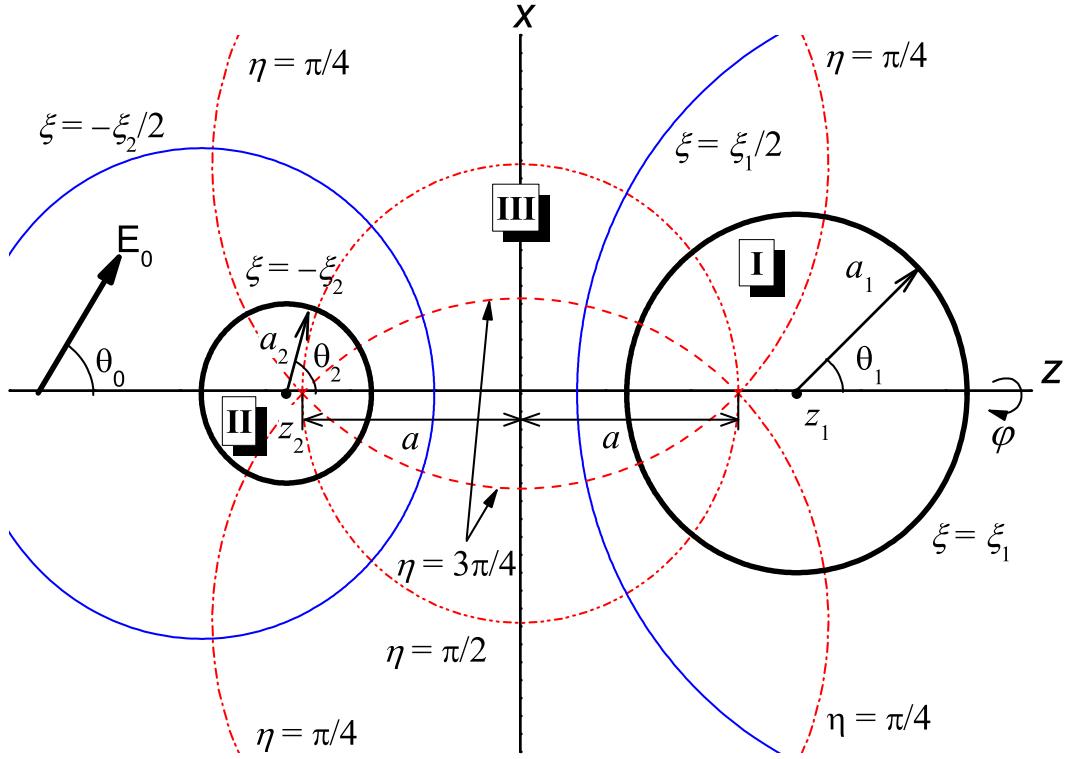


Рис. 6: Геометрия задачи о взаимодействии двух сферических частиц радиусами  $a_1$  и  $a_2$  в бисферической системе координат  $(\xi, \eta, \varphi)$ .

Далее введем бисферические координаты (см. [37, 49]), как показано на рисунке 6:

$$x = \frac{a \sin \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \sin \eta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

где

$$\operatorname{ch} \xi_1 = \frac{R^2 + a_1^2 - a_2^2}{2Ra_1}, \quad \operatorname{ch} \xi_2 = \frac{R^2 + a_2^2 - a_1^2}{2Ra_2},$$

$$R = z_1 - z_2 = a(\operatorname{cth} \xi_1 + \operatorname{cth} \xi_2) = a_1 \operatorname{ch} \xi_1 + a_2 \operatorname{ch} \xi_2,$$

$$a = a_1 \operatorname{sh} \xi_1 = a_2 \operatorname{sh} \xi_2, \quad z_1 = a \operatorname{cth} \xi_1 = a_1 \operatorname{ch} \xi_1, \quad z_2 = -a \operatorname{cth} \xi_2 = -a_2 \operatorname{ch} \xi_2.$$

Теперь перейдем к решению электростатической задачи.

Электростатический потенциал взаимодействия частиц в однородном диэлектрике удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\phi = 0$ , которое в бисферических координатах частично разделимо и может быть решено подстановкой

$$\phi(\xi, \eta, \varphi) = \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \Psi(\xi, \eta, \varphi). \quad (47)$$

Ограниченные решения уравнения Лапласа в бисферических координатах в областях

внутри частиц и во внешней области можно представить следующим образом:

$$\Psi_I(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [A_l^m \cos(m\varphi) + A_l^{-m} \sin(m\varphi)] e^{-(l+\frac{1}{2})\xi} P_l^m(\cos \eta), \quad (48)$$

$$\Psi_{II}(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [B_l^m \cos(m\varphi) + B_l^{-m} \sin(m\varphi)] e^{(l+\frac{1}{2})\xi} P_l^m(\cos \eta). \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{III}(\xi, \eta, \varphi) = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left\{ [C_l^m \cos(m\varphi) + C_l^{-m} \sin(m\varphi)] e^{-(l+\frac{1}{2})\xi} + \right. \\ & \left. + [D_l^m \cos(m\varphi) + D_l^{-m} \sin(m\varphi)] e^{(l+\frac{1}{2})\xi} \right\} P_l^m(\cos \eta), \end{aligned} \quad (50)$$

Потенциал внешнего электрического поля имеет вид:

$$\phi_0 = -E_{0x} \frac{a \sin \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} - E_{0z} \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad (51)$$

где  $E_{0x} = E_0 \sin \theta_0$ ,  $E_{0z} = E_0 \cos \theta_0$ . Его разложение по полиномам Лежандра в нашей бисферической системе координат определяется выражением:

$$\begin{aligned} \phi_0 = & -\sqrt{2}aE_{0z} \operatorname{sgn} \xi \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-(l+\frac{1}{2})|\xi|} P_l(\cos \eta) \\ & - 2\sqrt{2}aE_{0x} \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-(l+\frac{1}{2})|\xi|} P_l^1(\cos \eta) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (52)$$

В силу принципа суперпозиции результирующий потенциал в области III будет суммой выражений (52) и (50).

Из непрерывности потенциала и разрыва нормальных составляющих вектора электрической индукции вытекают следующие граничные условия [43]:

$$\phi|_{\xi=\xi_1-0} = \phi|_{\xi=\xi_1+0}, \quad \phi|_{\xi=-\xi_2-0} = \phi|_{\xi=-\xi_2+0}, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_{\xi=\xi_1-0} - \varepsilon_1 \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_{\xi=\xi_1+0} &= 4\pi\sigma_1, \\ \varepsilon_2 \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_{\xi=-\xi_2-0} - \varepsilon \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_{\xi=-\xi_2+0} &= 4\pi\sigma_2, \end{aligned} \quad (54)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – поверхностная плотность свободных зарядов первой и второй макрочастиц, соответственно, которые в общем случае являются функциями  $\eta$  и  $\varphi$ ,  $h_\xi$  – коэффициент Ламэ (см. ниже).

Распределение свободных поверхностных зарядов легче всего найти в сферической

системе координат с началом в центре каждой из частиц:

$$\sigma_i(\theta_i, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\sigma_{i,n}^m \cos m\varphi + \sigma_{i,n}^{-m} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta_i), \quad i = 1, 2. \quad (55)$$

Здесь  $\theta_i$  – широта точки поверхности  $i$ -ой частицы в сферической системе координат с полюсом в ее центре,  $\varphi$  – долгота этой точки. Можно показать, что разложение распределения (55) по полиномам Лежандра в бисферической системе координат имеет вид (см. приложение С):

$$\sigma_i(\theta_i, \varphi) = \sqrt{\operatorname{ch} \xi_i - \cos \eta} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (\tilde{\sigma}_{i,l}^m \cos m\varphi + \tilde{\sigma}_{i,l}^{-m} \sin m\varphi) \times e^{-(l+\frac{1}{2})|\xi_i|} P_l^m(\cos \eta), \quad i = 1, 2; \quad (56)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{i,l}^{\pm m} = \sum_{n=m}^{\infty} b_{i,l}^{nm} \sigma_{i,n}^{\pm m}, \quad (57)$$

$$b_{i,l}^{nm} = 2^{m+\frac{1}{2}} e^{-(n-m)\xi_i} \operatorname{sh}^m \xi_i \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \sum_{\nu=0}^{\min(l,n)-m} (-1)^{n-m+\nu} e^{2\nu\xi_i} \frac{(l+n-\nu)!}{\nu! (n-m-\nu)! (l-m-\nu)!}. \quad (58)$$

Из условий непрерывности потенциала (53) выразим коэффициенты  $A_l^{\pm m}$  и  $B_l^{\pm m}$  через  $C_l^{\pm m}$  и  $D_l^{\pm m}$ :

$$A_l = C_l + D_l e^{2(l+\frac{1}{2})\xi_1} - \sqrt{2}a E_{0z} (2l+1), \quad (59)$$

$$B_l = C_l e^{2(l+\frac{1}{2})\xi_2} + D_l + \sqrt{2}a E_{0z} (2l+1), \quad (60)$$

$$A_l^1 = C_l^1 + D_l^1 e^{2(l+\frac{1}{2})\xi_1} - 2\sqrt{2}a E_{0x}, \quad (61)$$

$$B_l^1 = C_l^1 e^{2(l+\frac{1}{2})\xi_2} + D_l^1 - 2\sqrt{2}a E_{0x}, \quad (62)$$

$$A_l^{\pm m} = C_l^{\pm m} + D_l^{\pm m} e^{2(l+\frac{1}{2})\xi_1}, m > 1; \quad (63)$$

$$B_l^{\pm m} = C_l^{\pm m} e^{2(l+\frac{1}{2})\xi_2} + D_l^{\pm m}, m > 1. \quad (64)$$

Затем, используя условия (54) и свойства присоединенных функций Лежандра [42],

после несложных, но длинных выкладок получим следующие уравнения для определения коэффициентов разложения потенциала:

$$\mathbb{A}_l^{\pm m} \mathbf{y}_{l-1} + \mathbb{C}_l^{\pm m} \mathbf{y}_l + \mathbb{B}_l^{\pm m} \mathbf{y}_{l+1} = \mathbf{F}_l^{\pm m}, \quad \begin{cases} l = 0, 1, \dots \infty, \\ m = 0, 1, \dots l; \end{cases} \quad (65)$$

где

$$\mathbf{y}_l = \begin{pmatrix} C_l^{\pm m} \\ D_l^{\pm m} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_l^{\pm m} = (l - m) \begin{pmatrix} (\varepsilon - \varepsilon_1) e^{-(l-\frac{1}{2})\xi_1} & -(\varepsilon + \varepsilon_1) e^{(l-\frac{1}{2})\xi_1} \\ -(\varepsilon + \varepsilon_2) e^{(l-\frac{1}{2})\xi_2} & (\varepsilon - \varepsilon_2) e^{-(l-\frac{1}{2})\xi_2} \end{pmatrix}, \quad (66)$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}_l^{\pm m})_{11} &= (\varepsilon - \varepsilon_1) [\operatorname{sh} \xi_1 - (2l + 1) \operatorname{ch} \xi_1] e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1}, \\ (\mathbb{C}_l^{\pm m})_{12} &= [(\varepsilon - \varepsilon_1) \operatorname{sh} \xi_1 + (2l + 1) (\varepsilon + \varepsilon_1) \operatorname{ch} \xi_1] e^{(l+\frac{1}{2})\xi_1}, \\ (\mathbb{C}_l^{\pm m})_{21} &= [(\varepsilon - \varepsilon_2) \operatorname{sh} \xi_2 + (2l + 1) (\varepsilon + \varepsilon_2) \operatorname{ch} \xi_2] e^{(l+\frac{1}{2})\xi_2}, \\ (\mathbb{C}_l^{\pm m})_{22} &= (\varepsilon - \varepsilon_2) [\operatorname{sh} \xi_2 - (2l + 1) \operatorname{ch} \xi_2] e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_2}, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\mathbb{B}_l^{\pm m} = (l + m + 1) \begin{pmatrix} (\varepsilon - \varepsilon_1) e^{-(l+\frac{3}{2})\xi_1} & -(\varepsilon + \varepsilon_1) e^{(l+\frac{3}{2})\xi_1} \\ -(\varepsilon + \varepsilon_2) e^{(l+\frac{3}{2})\xi_2} & (\varepsilon - \varepsilon_2) e^{-(l+\frac{3}{2})\xi_2} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_l)_1 &= 2a \left\{ 4\pi \tilde{\sigma}_{1,l} + (\varepsilon - \varepsilon_1) \sqrt{2} E_{0z} [\operatorname{ch} \xi_1 - (2l + 1) \operatorname{sh} \xi_1] \right\} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1}, \\ (\mathbf{F}_l)_2 &= 2a \left\{ 4\pi \tilde{\sigma}_{2,l} - (\varepsilon - \varepsilon_2) \sqrt{2} E_{0z} [\operatorname{ch} \xi_2 - (2l + 1) \operatorname{sh} \xi_2] \right\} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_2}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\mathbf{F}_l^1 = \begin{pmatrix} 2a [4\pi \tilde{\sigma}_{1,l}^1 - (\varepsilon - \varepsilon_1) 2\sqrt{2} E_{0x} \operatorname{sh} \xi_1] e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1} \\ 2a [4\pi \tilde{\sigma}_{2,l}^1 - (\varepsilon - \varepsilon_2) 2\sqrt{2} E_{0x} \operatorname{sh} \xi_2] e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_2} \end{pmatrix}, \quad (70)$$

$$\mathbf{F}_l^{\pm m} = \begin{pmatrix} 8\pi a \tilde{\sigma}_{1,l}^{\pm m} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1} \\ 8\pi a \tilde{\sigma}_{2,l}^{\pm m} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_2} \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Данная система уравнений принципиально решает поставленную электростатическую задачу нахождения потенциала. Она представляет собой систему с блочной трехдиагональной матрицей. Для решения таких задач разработано несколько численных методов, в данной работе используется метод матричной прогонки и редукции [50].

На рисунке 7 приведены зависимости потенциала поверхности макрочастиц в случае большой диэлектрической постоянной  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^5$  для частиц одинакового и разного радиусов от наименьшего расстояния между их поверхностями:  $L = (R - a_1 - a_2)$ . При такой большой диэлектрической проницаемости частицы ведут себя практически как металлические, поэтому потенциал почти не меняется на всей поверхности макрочастицы (данные для  $\eta = 0$  и  $\pi$ , где потенциал минимален и максимален, практически

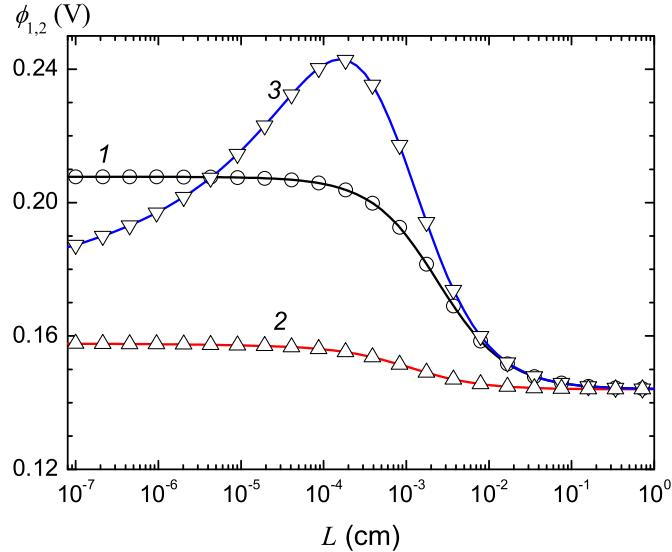


Рис. 7: Потенциалы поверхностей макрочастиц как функции наименьшего расстояния между их поверхностями: 1 – при  $a_1 = a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = q_2 = 10^3e$ ; 2,3 – при  $a_1 = 10$  мкм,  $a_2 = 1$  мкм,  $q_1 = 10^3e$ ,  $q_2 = 10^2e$  (2 – потенциал поверхности большей частицы, 3 – меньшей). Сплошные линии – расчеты в настоящей работе при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^5$  для  $\eta = 0$ , символы – для макрочастиц из проводящего материала  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$  согласно [28, 51].

совпадают. Например, при  $L = 10^{-7}$  см отношение потенциалов у поверхности в случае частиц одинакового размера при  $\eta = 0$  и  $\eta = \pi$  отличается от единицы на  $8.4 \times 10^{-6}$ ). Наблюдается полное согласие с аналогичным графиком для металлических макрочастиц из работ [28, 51].

### 3.2 Вычисление силы взаимодействия

При вычислении равнодействующей сил, приложенных к диэлектрическому телу можно использовать максвелловский тензор натяжений [43] (вычисления будем проводить для первой макрочастицы, которая находится со стороны положительных значений оси  $z$ , поэтому сила отталкивания со стороны второй макрочастицы для нее будет положительной, а притяжения – отрицательной):

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{T}_{1n} dS, \quad (72)$$

где

$$\mathbf{T}_{1n} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( E_n \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_1 E^2 \right) |_{\xi=\xi_1} \equiv \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( \frac{1}{2} (E_n^2 - E_\tau^2) \mathbf{n}_1 + E_n E_\tau \boldsymbol{\tau}_1 \right) |_{\xi=\xi_1}, \quad (73)$$

$$E_n = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} |_{\xi=\xi_1}, \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_\xi; \quad E_\tau = -\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} |_{\xi=\xi_1}, \quad \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{e}_\eta;$$

$\mathbf{e}$  – ортонормированные базисные векторы. Отметим, что

$$(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_z) = -\cos \theta, \quad (\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_z) = -\sin \theta.$$

Из (72,73) для силы, действующей на первую частицу находим (все величины при  $\xi = \xi_1$ ):

$$F_{1x} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint \left[ \frac{1}{2} (E_\xi^2 - E_\eta^2 - E_\varphi^2) \frac{\operatorname{sh} \xi \sin \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} + E_\xi E_\eta \frac{(1 - \operatorname{ch} \xi \cos \eta) \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} + E_\xi E_\varphi \sin \varphi \right] h_\eta h_\varphi d\eta d\varphi, \quad (74)$$

$$F_{1y} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint \left[ \frac{1}{2} (E_\xi^2 - E_\eta^2 - E_\varphi^2) \frac{\operatorname{sh} \xi \sin \eta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} + E_\xi E_\eta \frac{(1 - \operatorname{ch} \xi \cos \eta) \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} - E_\xi E_\varphi \cos \varphi \right] h_\eta h_\varphi d\eta d\varphi, \quad (75)$$

$$F_{1z} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint \left[ \frac{1}{2} (E_\xi^2 - E_\eta^2 - E_\varphi^2) \frac{\operatorname{ch} \xi \cos \eta - 1}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} + E_\xi E_\eta \frac{\operatorname{sh} \xi \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \right] h_\eta h_\varphi d\eta d\varphi, \quad (76)$$

где  $h_\xi$ ,  $h_\eta$  и  $h_\varphi$  – коэффициенты Ламэ, которые в бисферических координатах определяются выражениями [37]:

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad h_\varphi = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}. \quad (77)$$

Используя свойства присоединенных полиномов Лежандра [37, 42, 49] (см. приложение Е), после длинных выкладок для силы взаимодействия неоднородно заряженных диэлектрических сфер в однородном диэлектрике в присутствии однородного внешнего электрического поля находим (см. приложение D):

$$\begin{aligned} F_{1x} = & \frac{\varepsilon}{4} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) \left[ D_l^1 \left( \tilde{C}_{l-1} + \tilde{C}_{l+1} - 2\tilde{C}_l \right) - \tilde{C}_l^1 (D_{l-1} + D_{l+1} - 2D_l) \right] + \\ & + \frac{\varepsilon}{8} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \times \\ & \times \left[ D_l^{m+1} \left( \tilde{C}_{l-1}^m + \tilde{C}_{l+1}^m - 2\tilde{C}_l^m \right) + D_l^{-(m+1)} \left( \tilde{C}_{l-1}^{-m} + \tilde{C}_{l+1}^{-m} - 2\tilde{C}_l^{-m} \right) - \right. \\ & \left. - \tilde{C}_l^{m+1} (D_{l-1}^m + D_{l+1}^m - 2D_l^m) - \tilde{C}_l^{-(m+1)} (D_{l-1}^{-m} + D_{l+1}^{-m} - 2D_l^{-m}) \right], \quad (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{1y} = & \frac{\varepsilon}{4} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) \left[ D_l^{-1} \left( \tilde{C}_{l-1} + \tilde{C}_{l+1} - 2\tilde{C}_l \right) - \tilde{C}_l^{-1} (D_{l-1} + D_{l+1} - 2D_l) \right] + \\
& + \frac{\varepsilon}{8} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \times \\
& \times \left[ D_l^{-(m+1)} \left( \tilde{C}_{l-1}^m + \tilde{C}_{l+1}^m - 2\tilde{C}_l^m \right) - D_l^{m+1} \left( \tilde{C}_{l-1}^{-m} + \tilde{C}_{l+1}^{-m} - 2\tilde{C}_l^{-m} \right) - \right. \\
& \left. - \tilde{C}_l^{-(m+1)} (D_{l-1}^m + D_{l+1}^m - 2D_l^m) + \tilde{C}_l^{m+1} (D_{l-1}^{-m} + D_{l+1}^{-m} - 2D_l^{-m}) \right], \quad (79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{1z} = & \frac{\varepsilon}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (2l+1) \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \left( \tilde{C}_l^m D_l^m + \tilde{C}_l^{-m} D_l^{-m} \right) - \\
& - \frac{\varepsilon}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \left[ \left( \tilde{C}_l^m D_{l+1}^m + \tilde{C}_l^{-m} D_{l+1}^{-m} \right) + \left( \tilde{C}_{l+1}^m D_l^m + \tilde{C}_{l+1}^{-m} D_l^{-m} \right) \right]. \quad (80)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{C}_l = C_l - (2l+1)\sqrt{2}aE_{0z}, \quad \tilde{C}_l^1 = C_l^1 - 2\sqrt{2}aE_{0x}, \quad \tilde{C}_l^{-1} = C_l^{-1}, \quad \tilde{C}_l^{\pm m} = C_l^{\pm m}, \quad m > 1. \quad (81)$$

В случае однородно заряженных частиц и при отсутствии внешнего электрического поля из выражений (78–80), видно, что отлична от нуля только  $z$ -составляющая силы:

$$\begin{aligned}
F_{1z} = & \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n [(2n+1)D_n - (n+1)D_{n+1} - nD_{n-1}] \\
= & \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n [(2n+1)C_n - (n+1)C_{n+1} - nC_{n-1}]. \quad (82)
\end{aligned}$$

### 3.3 Притяжение и отталкивание одноименно заряженных частиц

Отталкивание между одноименно заряженными частицами может перейти в притяжение на малых расстояниях из-за взаимно наведенных на их поверхностях зарядов. Например, известно, что в случае взаимодействия точечного заряда с одноименно заряженной проводящей сферой, на малых расстояниях они начинают притягиваться друг к другу [37]. Поэтому далее с помощью формулы (82) исследуем этот вопрос в случае взаимодействия двух диэлектрических сферических частиц, несущих одноименные заряды  $q_1, q_2$ , однородно распределенные по их поверхностям.

На рисунке 8 изображена зависимость силы взаимодействия одинаковых частиц с  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$  от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц для

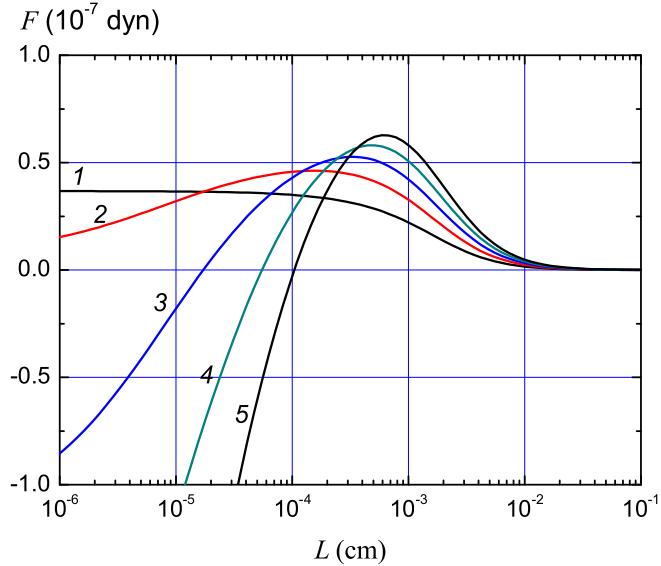


Рис. 8: Сила взаимодействия однородно заряженных диэлектрических сфер в вакууме ( $\epsilon = 1$ ) как функция наименьшего расстояния между их поверхностями  $L = (R - a_1 - a_2)$  для различных отношений зарядов при  $a_1 = a_2 = 10^{-3}$  см,  $q_1 = 10^3 e$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 25$ . Кривая 1 –  $q_1/q_2 = 1.0$ , 2 – 1.5, 3 – 2.0, 4 – 2.5, 5 – 3.

различных отношений зарядов. Отрицательные значения силы соответствуют притяжению, а положительные – отталкиванию. Видно, что с ростом отношения зарядов отталкивание одноименно заряженных макрочастиц переходит в притяжение. Для рассматриваемой диэлектрической постоянной это происходит при значения отношения  $q_1/q_2$  между 1.5 и 2 (точнее при  $q_1/q_2 \approx 1.556$ , а при уменьшении отношения зарядов это происходит при  $q_1/q_2 \approx 0.6426$ , что является числом, обратным предыдущему, см. ниже).

Рисунок 9 показывает, как меняется характер взаимодействия двух сфер одинакового радиуса с отношением зарядов  $q_1/q_2 = 3$  при изменении их диэлектрической проницаемости. Ясно видно, что увеличение диэлектрической постоянной приводит к уменьшению силы отталкивания на больших расстояниях и приводит к переходу отталкивания в притяжение на малых расстояниях (это происходит при значении диэлектрической проницаемости между 5 и 10), причем сила притяжения оказывается тем больше, чем больше значение диэлектрической проницаемости. Также видно, что при больших значениях диэлектрической проницаемости сила практически совпадает с силой взаимодействия металлических частиц.

На рисунке 10 приведены зависимости силы взаимодействия для диэлектрических частиц с  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 25$ , с зарядами  $q_1 = 3q_2$  для разных отношений их радиусов. Видно, как по мере увеличения отношения радиусов  $a_1/a_2$  исчезает и снова появляется эффект притяжения. Такое поведение понятно из рисунка 11, на котором приведены кривые для нескольких значений диэлектрической проницаемости частиц, которые ограничивают область параметров на плоскости  $(a_1/a_2, q_1/q_2)$ , в которой эффект притяжения одноименно заряженных диэлектрических частиц не проявляется (эта область лежит между кривыми, обозначенными с индексами 1 и 2 при одной и той же букве для каждого зна-

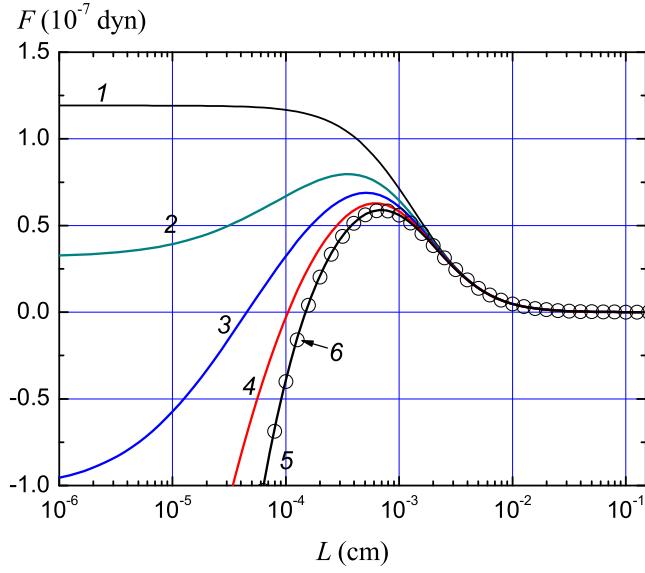


Рис. 9: Сила взаимодействия однородно заряженных диэлектрических сфер в вакууме для различных диэлектрических постоянных от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц при  $a_1 = a_2 = 10$  мкм,  $q_2 = 10^3 e$ ,  $q_1 = 3q_2$ . Кривая 1 –  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ , 2 – 5, 3 – 10, 4 – 25, 5 –  $10^3$ , 6 – расчеты для металлических частиц  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$  согласно работам [28, 51].

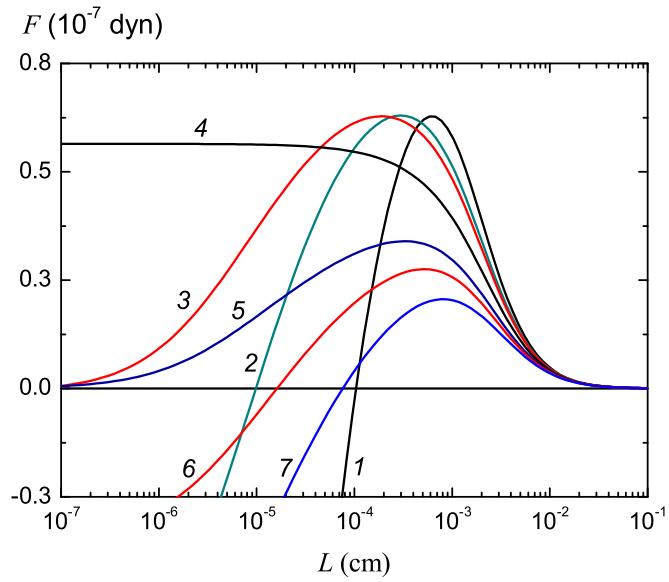


Рис. 10: Сила взаимодействия между сферическими частицами в вакууме для разных отношений радиусов макрочастиц  $a_1/a_2$  от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц при  $a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = 3q_2$ ,  $q_2 = 10^3 e$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$ . Кривая 1 –  $a_1/a_2 = 1$ , 2 – 1.3, 3 – 1.425, 4 – 1.828, 5 – 2.345, 6 – 2.6, 7 – 3.0

чения диэлектрической проницаемости). Кривая 3 на рисунке 10 соответствует точке пересечения кривой  $C_2$  с прямой  $q_1/q_2 = 3$  на рисунке 11, а кривая 5 – точке пересечения той же прямой с кривой  $C_1$ .

Покажем, что границы области, в которой отсутствует эффект притяжения, определяются только отношением радиусов и зарядов равномерно заряженных частиц. Для этого выпишем уравнения для определения коэффициентов разложения потенциала для случая равномерного распределения свободного заряда по поверхностям частиц в среде без внешнего электрического поля. Разделив получившиеся уравнения на  $2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{\frac{q_1 q_2}{a_1 a_2}}$ , для рассматриваемого случая из (65–69) находим:

$$\begin{aligned} & (1 - \kappa_1) le^{\xi_1} \bar{C}_{l-1} - (1 + \kappa_1) le^{2l\xi_1} \bar{D}_{l-1} + \\ & + (1 - \kappa_1) [\operatorname{sh} \xi_1 - (2l + 1) \operatorname{ch} \xi_1] \bar{C}_l + \\ & + [(1 - \kappa_1) \operatorname{sh} \xi_1 + (2l + 1) (1 + \kappa_1) \operatorname{ch} \xi_1] e^{(2l+1)\xi_1} \bar{D}_l + \\ & + (l + 1) (1 - \kappa_1) e^{-\xi_1} \bar{C}_{l+1} - (l + 1) (1 + \kappa_1) e^{2(l+1)\xi_1} \bar{D}_{l+1} = \\ & = \sqrt{\frac{q_1 a_2}{q_2 a_1}} \operatorname{sh} \xi_1, \quad (83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - (1 + \kappa_2) le^{2l\xi_2} \bar{C}_{l-1} + (1 - \kappa_2) le^{\xi_2} \bar{D}_{l-1} + \\ & + [(1 - \kappa_2) \operatorname{sh} \xi_2 + (2l + 1) (1 + \kappa_2) \operatorname{ch} \xi_2] e^{(2l+1)\xi_2} \bar{C}_l + \\ & + (1 - \kappa_2) [\operatorname{sh} \xi_2 - (2l + 1) \operatorname{ch} \xi_2] \bar{D}_l - \\ & - (l + 1) (1 + \kappa_2) e^{2(l+1)\xi_2} \bar{C}_{l+1} + (l + 1) (1 - \kappa_2) e^{-\xi_2} \bar{D}_{l+1} = \\ & = \sqrt{\frac{q_2 a_1}{q_1 a_2}} \operatorname{sh} \xi_2. \quad (84) \end{aligned}$$

где введены новые коэффициенты и относительные диэлектрические проницаемости:

$$\bar{C}_l = \frac{C_l}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_1 a_2}{q_1 q_2}}, \quad \bar{D}_l = \frac{D_l}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_1 a_2}{q_1 q_2}}, \quad \kappa_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \quad \kappa_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}. \quad (85)$$

Теперь, с учетом того, что  $\xi_1 = \xi_1 \left( \frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2} \right)$  и  $\xi_2 = \xi_2 \left( \frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2} \right)$ , из (83,84) следует, что

$$\bar{C}_l = \bar{C}_l \left( \frac{q_1}{q_2}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2}, \kappa_1, \kappa_2 \right), \quad \bar{D}_l = \bar{D}_l \left( \frac{q_1}{q_2}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2}, \kappa_1, \kappa_2 \right). \quad (86)$$

Следовательно, при подстановке (85,86) в (82) находим, что

$$F_{1z} = \varepsilon \frac{q_1 q_2}{a_1 a_2} f \left( \frac{q_1}{q_2}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{L^2}{a_1 a_2}, \kappa_1, \kappa_2 \right), \quad (87)$$

где  $f$  – некоторая неизвестная функция указанных аргументов. Так как точная граница области притяжения и отталкивания определяется уравнением  $F_{1z} = 0$  при  $L = 0$ , то из (87) следует, что наличие или отсутствие эффекта притяжения на малых расстояниях зависит только от относительных величин  $q_1/q_2$ ,  $a_1/a_2$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , а не от абсолютных их значений (величина самой силы конечно зависит).

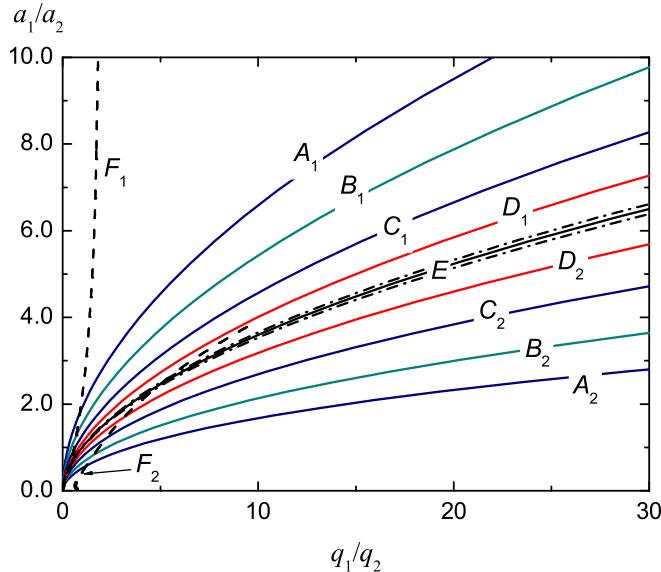


Рис. 11: Кривые, разделяющие области притяжения и отталкивания одноименно и однородно заряженных макрочастиц на плоскости ( $a_1/a_2$  и  $q_1/q_2$ ) для различных значений их диэлектрической проницаемости. В области между кривыми  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  и т.д. притяжения нет ни при каких расстояниях. Кривые ( $A_1, A_2$ ) для  $\kappa_1 = \kappa_2 = 5$ , ( $B_1, B_2$ ) – 10, ( $C_1, C_2$ ) – 25, ( $D_1, D_2$ ) – 81, штрих-пунктирные кривые – 1000, кривая  $E$  согласно (89) для проводящих макрочастиц, ( $F_1, F_2$ ) оцифрованные данные из [15] для  $\kappa_1 = \kappa_2 = 25$ .

Из рисунка 11 видно, что с ростом диэлектрической проницаемости частиц область, где отсутствует эффект притяжения, постепенно сужается и для проводящих частиц ( $\varepsilon_{1,2} \rightarrow \infty$ ) эта область превращается просто в кривую, т.е. в множество меры ноль. Подробное исследование данного вопроса для проводящих частиц проведено в работе [29] с использованием асимптотических выражений емкостных коэффициентов при  $L \rightarrow 0$  [26, 31]:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)L} - \psi \left( \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) + O(L) \right], \\ C_{22} &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)L} - \psi \left( \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right) + O(L) \right], \\ C_{12} &= -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)L} + \gamma + O(L) \right], \end{aligned} \quad (88)$$

где  $\psi(z) = d \ln \Gamma(z) / dz$  – дигамма функция,  $\gamma = 0.5772\dots$  – постоянная Эйлера.

В работе [29] показано, что эффект притяжения не проявится только если сферические проводники имеют заряды в таком отношении, которое стало бы в случае приведения их в электрический контакт, когда потенциалы их поверхностей станут точно

равными друг другу. Используя приведенные выше емкостные коэффициенты можно найти энергию электрического поля, дифференцируя которую можно увидеть, что сила взаимодействия станет отрицательной только при выполнении условия [29]:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\gamma + \psi\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)}{\gamma + \psi\left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)}. \quad (89)$$

В работе [35] также был сделан вывод, что когда отношение зарядов проводящих сфер отличается от отношения их зарядов после приведения в электрический контакт, то притяжение проявится всегда. В этой работе было найдено условие равенства потенциалов поверхностей в виде:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{12} + c_{22}}, \quad (90)$$

которое после подстановки выражений (88) точно переходит в (89).

Следует отметить, что диаграмма, изображенная на рисунке 11, как и положено, обладает свойством симметрии по отношению к перестановке частиц. Из рисунка 11 видно, что области, где на малых расстояниях появляется притяжение, и область, где на всех расстояниях наблюдается только отталкивание одноименно заряженных частиц, разделены двумя кривыми. Введем величину  $y = a_1/a_2$  и обозначим эти кривые как  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , где  $x = q_1/q_2$ . Вследствие равенства сил, действующих на первую и вторую частицы, при  $\kappa_1 = \kappa_2$  положение точки нуля не должно меняться при перестановке частиц. Поэтому между этими функциями должны существовать соотношения:  $y_1(x) = y_2^{-1}(x^{-1})$  и  $y_2(x) = y_1^{-1}(x^{-1})$ . Действительно, если при некотором  $q_1/q_2 = x$  граница между областями лежит в точках  $a_1/a_2 = y_1(x)$  и  $a_1/a_2 = y_2(x)$ , то при перестановке частиц для  $q_2/q_1 = x^{-1}$  в точках  $a_2/a_1 = y_1^{-1}(x)$  и  $a_2/a_1 = y_2^{-1}(x)$ .

На рисунке 12 приведены графики  $y_1(x)$  и  $y_2^{-1}(x^{-1})$ , которые действительно совпадают (в случае проводников это совпадение хорошо видно из формулы 89). Также видно, что поведение кривых при изменении отношения зарядов частиц для различных значениях диэлектрической проницаемости похожи другу на друга, а сами кривые близки к прямым линиям, поэтому в данном диапазоне отношений зарядов они могут быть аппроксимированы в виде:  $y_1(x) = kx^\alpha$ , и  $y_2(x) = k^{-1}x^\alpha$ , причем степень  $\alpha \approx 0.56$  и практически не меняется при изменении диэлектрической проницаемости частиц, а коэффициент  $k$  растет с уменьшением  $\varepsilon_{1,2}$ . Отметим, однако, что вышеприведенная аппроксимация не является универсальной и при сильно больших и сильно малых значениях  $x$  перестает иметь место.

На рисунке 13 приведены графики произведения функций  $x_1(y)$  и  $x_2(y^{-1})$ , которые являются обратными функциями  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ . Видно, что это произведение близко к единице, но с уменьшением и увеличением отношения радиусов отличие от единицы растет и становится чуть больше 0.1% при  $a_1/a_2 = 0.1$  и 10 для  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 81$ . Отметим, что данные на рисунках 11–13 рассчитаны с максимальным числом учитываемых членов при вычислении силы  $l_{max} = 2^{16}$  и при наименьшем расстоянии между поверхностями

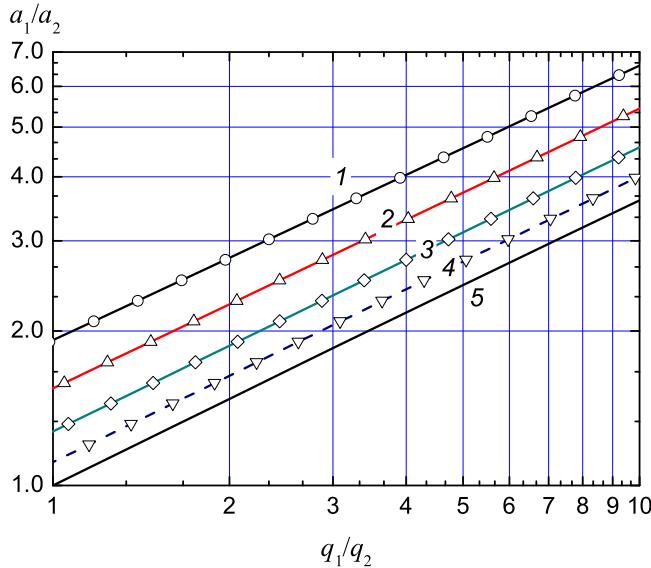


Рис. 12: Границы области притяжения и отталкивания одноименно и однородно заряженных макрочастиц в логарифмическом масштабе. Кривые (1–4) графики  $y_1(x)$ , символы –  $y_2(x^{-1})$ . Кривая 1 и  $\circ$  для  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5$ ; 2,  $\Delta$  – 10; 3,  $\diamond$  – 25; 4,  $\nabla$  – 81; 5 кривая согласно (89) для проводящих макрочастиц.

стями  $L = 10^{-9}$  см. Значения отношения  $q_1/q_2$ , при которых для заданного отношения радиусов сила становится равной нулю, определялись при фиксированных  $a_2 = 10$  мкм и  $q_2 = 10^3 e$  ( $e$  – элементарный заряд). Указанное отличие от единицы произведения функций  $x_1(y)$  и  $x_2(y^{-1})$  связано с тем, что корни уравнения  $F_{1z} = 0$  находились при конечном расстоянии  $L = 10^{-9}$  см, а не при контакте частиц. Для “точного” значения отношения зарядов на границе областей на этом расстоянии сила еще положительна. При этом для постоянного межчастичного расстояния оказывается, что приведенное значение расстояния  $\tilde{L} = L/\sqrt{a_1 a_2}$  для  $a_1/a_2 = 0.1$  и  $a_1/a_2 = 10$  отличаются в 10 раз. Если пересчитать границы при постоянном  $\tilde{L} = 10^{-6}$ , то максимальное (по абсолютной величине) отличие произведения  $x_1(y)x_2(y^{-1})$  от единицы в диапазоне  $0.1 \leq y \leq 10$  будет равно  $3.8 \times 10^{-8}$  (см. также таблицу 1).

Такая высокая точность определения произведения  $x_1(y)x_2(y^{-1})$  не позволяет судить о точности определения положения самих границ, а говорит только о том, что положение точки, где сила обращается в нуль, действительно определяется только отношениями радиусов и зарядов. Например, в работе [28] было показано, что при  $a_1 = a_2$  и  $q_1/q_2 = 1.0035$  притяжение между проводящими шарами появляется на расстоянии  $L \lesssim 10^{-10}$  см (см. рисунок 12 в [28]), хотя притяжение на всех расстояниях отсутствует только при точном равенстве  $q_1 = q_2$ .

О точности определения положения границ можно судить по данным, представленным в таблице 1. Видно, что по мере уменьшения приведенного расстояния, относительная точность определения отношения зарядов на границе растет и при  $\tilde{L} = 10^{-6}$  оказывается лучше 0.05%. (Отметим, что в таблице 1 приведены отношения зарядов на границах только с 7 знаками, а величины  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  вычислялись по исходным значениям отношения зарядов, полученными с точностью 15 знаков).

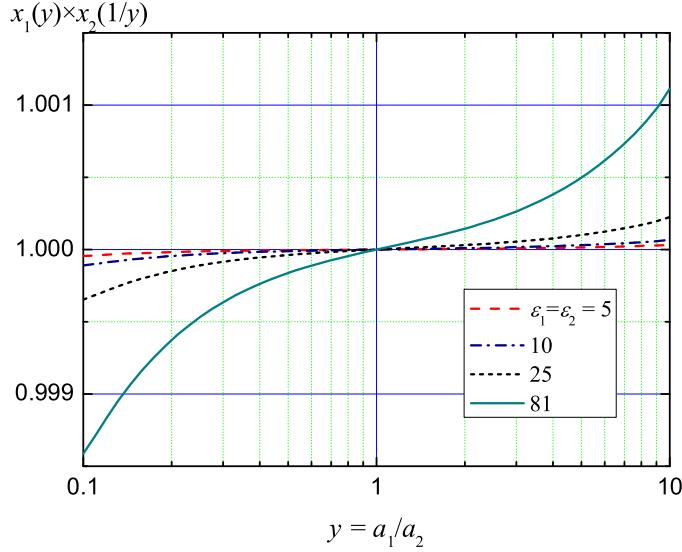


Рис. 13: Произведение функций  $x_1(y)$  и  $x_2(y^{-1})$ , определяющих границы области притяжения и отталкивания одноименно и однородно заряженных макрочастиц на плоскости ( $y = a_1/a_2$  и  $x = q_1/q_2$ ) для различных значений их диэлектрической проницаемости.

Таблица 1: Отношения зарядов на верхней и нижней границах между областями, где есть притяжение на малых расстояниях и нет на всех расстояниях для разных значений приведенного расстояния между поверхностями диэлектрических частиц  $\kappa_1 = \kappa_2 = 81$  при числе учитываемых членов до  $l_{\max} = 2^{17}$  и  $a_2 = 10^{-3}$  см.

$L/\sqrt{a_1 a_2}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$
$a_1 = 0.1a_2$ ( $y = 0.1$ )	$x_1$ $x_2$	0.011231 54.51514	0.011226 54.49613	0.011177 54.31719	0.010824 53.04312
$a_1 = a_2$ ( $y = 1$ )	$x_1$ $x_2$	0.830659 1.203864	0.830513 1.204076	0.829102 1.206124	0.817913 1.222623
$a_1 = 10a_2$ ( $y = 10$ )	$x_1$ $x_2$	0.018344 89.04120	0.018350 89.08239	0.018410 89.47332	0.018853 92.38390
$f_1^a$		1.899	6.429	-2.572	3.284
$f_2^b$		4.881	-5.095	-2.521	2.701
$f_3^c$		0.250	1.847	-3.416	-2.692

$$^a f_1 = [x_1(y=1)x_2(y=1) - 1] \times 10^{11}$$

$$^b f_2 = [x_1(0.1)x_2(10) - 1] \times 10^9$$

$$^c f_3 = [x_1(10)x_2(0.1) - 1] \times 10^9$$

Таблица 2: Приведенная сила взаимодействия ( $F_{12}a_1a_2/q_1q_2$ ) двух одинаковых сферических частиц при  $L = 10^{-10}$  см и числе учитываемых членов при вычислении силы  $l_{\max} = 2^{16}$  в настоящей работе и  $L = 0$  и числе учитываемых членов мультипольного разложения потенциала  $n = 30$  в [15].

	Настоящая работа	Работа [15]
$\kappa_1 = \kappa_2 = 2$	0.210 013 282 363	0.210 013 297 4
$\kappa_1 = \kappa_2 = 1000$	0.153 866 817 435	0.153 866 795

В работе [15] также были определены границы областей притяжения и отталкивания. Однако, результаты, приведенные в [15], не могут быть правильны так как не симметричны по отношению к операции перестановки частиц. Эти результаты заметно отличаются от наших данных приведенных на рисунке 11. Видно, что кривые  $F_1, F_2$  весьма сильно отличаются от  $C_1, C_2$ , а  $F_2$  пересекает даже кривую для проводящих частиц. Также необходимо отметить, что при  $a_2 = 0$  на рисунке 6 работы [15] существует область значений отношения  $q_2/q_1$  (до 2 при  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ), в которой нет притяжения между частицами. Между тем хорошо известно [37, 52], что между точечной и диэлектрической частицей сферической формы нет притяжения только при неравенстве  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ , т.е. при  $\kappa_1 \leq 1$ , а при  $\kappa_1 > 1$  притяжение на малых расстояниях обязательно появится. Далее, при  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1000$  сила взаимодействия диэлектрических частиц незначительно отличается от случая проводящих частиц и кривые, отделяющие области притяжения и отталкивания должны быть близки к кривой  $E$ , что имеет место на рисунке 11, а в работе [15] область отталкивания для данного значения диэлектрической проницаемости намного шире. В работе [15] задача решалась в сферической системе координат, которая приводила к обычной системе уравнений для определения коэффициентов мультипольного разложения потенциала. В таблице 2 представлены значения приведенной силы (определенной как  $\tilde{F}_{1z} = F_{1z}a_1a_2/q_1q_2$ ) для двух одинаковых диэлектрических частиц с  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$  и  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1000$ . В настоящей работе расчеты проведены при  $l_{max} = 2^{16}$ , а при увеличении числа членов до  $l_{max} = 2^{17}$  приведенная сила менялась только на единицу в последнем приведенном в таблице знаке. Сравнение представленных в таблице данных показывает, что точность определения приведенной силы в работе [15] была достаточно высокой, по крайней для частиц равного размера, и причины неточного определения границы областей притяжения и отталкивания в работе [15] остаются неясными. Отметим, что для проводящих шаров одинаковых размеров и зарядов [29, 53]

$$\tilde{F}_{1z} = F_{1z} \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2} = \frac{4 \ln 2 - 1}{24 \ln^2 2} = 0.153\,725\,465,$$

а расчеты для  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^5$  дали  $\tilde{F}_{1z} = 0.153\,728\,821$  при  $L = 10^{-10}$  см, что позволяет судить о точности проведенных в настоящей работе расчетов. Расчеты по полученным в работах [28, 51] выражениям для проводящих частиц  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$  при том же числе членов разложения и на том же межчастичном расстоянии привели к  $\tilde{F}_{1z} = 0.153\,725\,458$ , что позволяет сделать вывод о том, насколько отличаются силы при  $L = 0$  и  $L = 10^{-10}$  см.

Остановимся подробнее на вопросе: почему же всё-таки одноимённо заряженные частицы могут притягиваться. Как уже отмечалось выше, притяжение одноименно заряженных макрочастиц на малых расстояниях обусловлено их взаимной поляризацией. При определенных соотношениях между зарядами и радиусами частиц на их поверхностях, обращенных друг к другу, могут индуцироваться такие заряды, что полные заряды (т.е. сумма свободного и поляризационного зарядов) в этой части будут иметь противоположные знаки. Если эти полные заряды достаточно велики, то, так как рас-

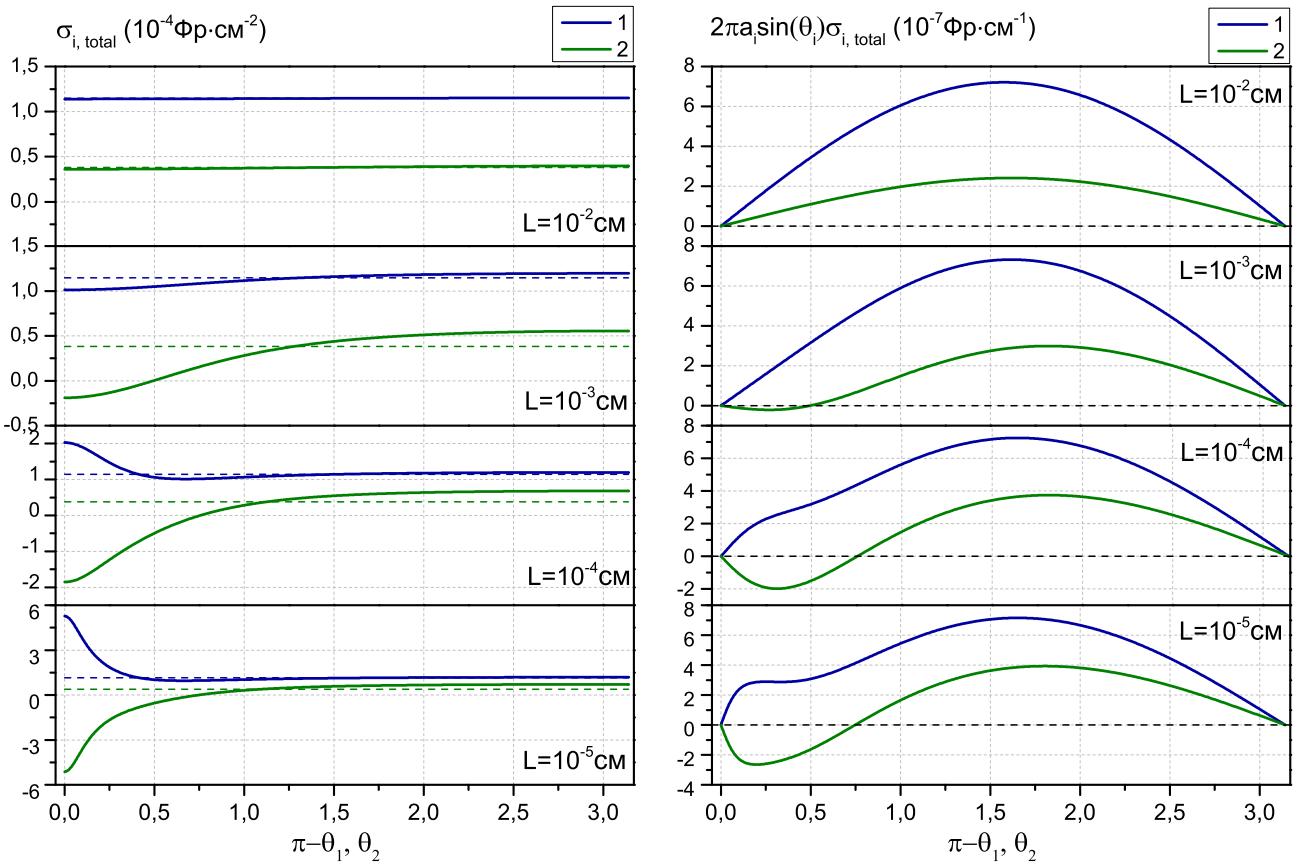


Рис. 14: Зависимость поверхностной плотности полного заряда от угла при  $a_1 = a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = 3q_2$ ,  $q_2 = 10^3 e$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10$  для четырёх значений  $L = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  см. Левый график изображает зависимость поверхностной плотности полного заряда на первой частице (95) от угла  $\pi - \theta_1$  (синий цвет) и зависимость поверхностной плотности полного заряда на второй частице (96) от угла  $\theta_2$  (зелёный цвет). Правый график аналогичен левому, но по оси ординат отложена величина поверхностной плотности полного заряда, умноженная на вес соответствующего удельного элемента площади  $2\pi a_i \sin \theta_i$ . Пунктирные линии на левом графике соответствуют поверхностной плотности свободных зарядов.

стояние между этими зарядами порядка  $L$ , а не  $R$ , между частицами будет наблюдаться притяжение.

Выражения, определяющие поверхностную плотность полного заряда на первой и второй частицах есть

$$\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} |_{\xi=\xi_1-0} - \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} |_{\xi=\xi_1+0} = 4\pi\sigma_{1,total}, \quad (91)$$

$$\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} |_{\xi=-\xi_2-0} - \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} |_{\xi=-\xi_2+0} = 4\pi\sigma_{2,total}. \quad (92)$$

Откуда, используя (48-50), а также связь между коэффициентами (59-64), получим

$$4\pi\sigma_{1,total} = \frac{(\operatorname{ch} \xi_1 - \cos \eta)^{\frac{3}{2}}}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (2l+1) \left( \tilde{D}_l^m \cos m\varphi + \tilde{D}_l^{-m} \sin m\varphi \right) e^{(l+\frac{1}{2})\xi_1} P_l^m(\cos \eta), \quad (93)$$

$$4\pi\sigma_{2,total} = \frac{(\operatorname{ch} \xi_2 - \cos \eta)^{\frac{3}{2}}}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (2l+1) \left( \tilde{C}_l^m \cos m\varphi + \tilde{C}_l^{-m} \sin m\varphi \right) e^{(l+\frac{1}{2})\xi_2} P_l^m(\cos \eta). \quad (94)$$

Здесь  $\tilde{D}_l = D_l + (2l+1)\sqrt{2}aE_{0z}$ ,  $\tilde{D}_l^1 = D_l^1 - 2\sqrt{2}aE_{0x}$ ,  $\tilde{D}_l^{-1} = D_l^{-1}$ ,  $\tilde{D}_l^{\pm m} = D_l^{\pm m}$ ,  $m > 1$ , а  $\tilde{C}_l^{\pm m}$  определяются формулой (81).

Выражения (93) и (94) в случае рассматриваемого нами взаимодействия одноименно заряженных частиц без поля переходят в

$$4\pi\sigma_{1,total} = \frac{(\operatorname{ch} \xi_1 - \cos \eta)^{\frac{3}{2}}}{a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) D_l e^{(l+\frac{1}{2})\xi_1} P_l(\cos \eta), \quad (95)$$

$$4\pi\sigma_{2,total} = \frac{(\operatorname{ch} \xi_2 - \cos \eta)^{\frac{3}{2}}}{a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l e^{(l+\frac{1}{2})\xi_2} P_l(\cos \eta). \quad (96)$$

На рисунке 14 слева изображена поверхностная плотность полного заряда  $\sigma_{i,total}$  на каждой из частиц, а на том же рисунке 14 справа поверхность полного заряда умноженная на соответствующий удельный элемент площади  $2\pi a_i \sin \theta_i \sigma_{i,total}$  от углов  $\pi - \theta_1$  для первой и  $\theta_2$  для второй частицы. Частицы имеют диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10$ , а соотношения их зарядов и радиусов есть  $a_1 = a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = 3q_2$ ,  $q_2 = 10^3 e$ , что соответствует притяжению между частицами на расстояниях начиная с  $L \approx 5 \cdot 10^{-5}$  см. Мы видим из рисунка 14, что по мере сближения частиц на их поверхностях, обращенных друг к другу, индуцируются довольно большие заряды разных знаков, которые и обеспечивают притяжение.

Рисунок 15 аналогичен рисунку 14, но уже при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10$ ,  $a_1 = 1.828a_2$ ,  $a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = 3q_2$ ,  $q_2 = 10^3 e$ . Видно, что данном случае частицы могут только отталкиваться, так как полные заряды на их поверхностях остаются положительными на любых

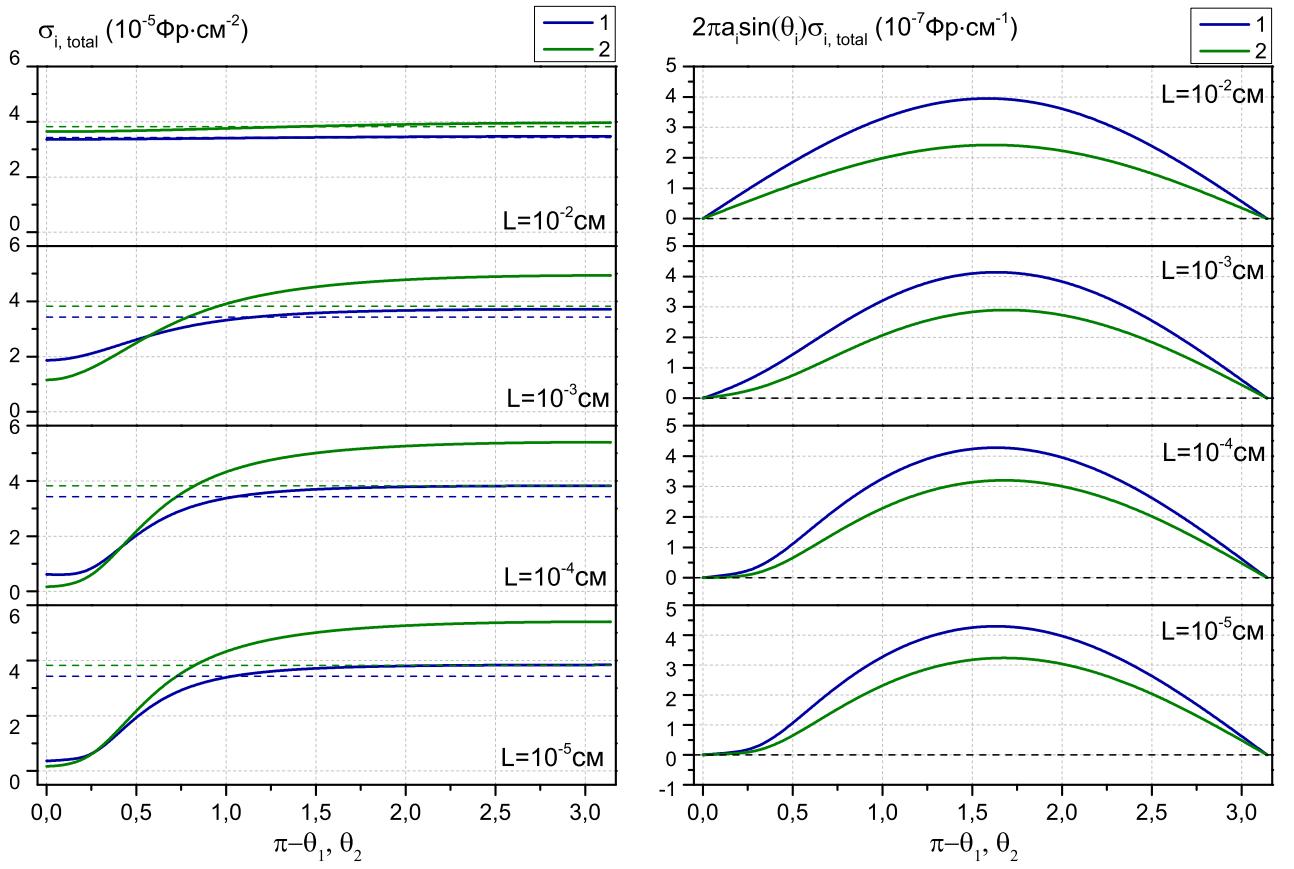


Рис. 15: Зависимость поверхностной плотности полного заряда от угла при  $a_1 = 1.828a_2$ ,  $a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = 3q_2$ ,  $q_2 = 10^3 e$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10$  для четырёх значений  $L = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  см. Левый график изображает зависимость поверхностной плотности полного заряда на первой частице (95) от угла  $\pi - \theta_1$  (синий цвет) и зависимость поверхностной плотности полного заряда на второй частице (96) от угла  $\theta_2$  (зелёный цвет). Правый график аналогичен левому, но по оси ординат отложена величина поверхности плотности полного заряда, умноженная на вес соответствующего удельного элемента площади  $2\pi a_i \sin \theta_i$ . Пунктирные линии на левом графике соответствуют поверхностной плотности свободных зарядов.

расстояниях. И действительно, из рисунков 10 и 11 отчетливо следует наличие отталкивающего взаимодействия при данных параметрах частиц. Однако, заметим, что для некоторых приграничных значений на диаграмме 11 возможна такая ситуация, что хотя полные заряды на поверхностях частиц, обращенных друг к другу могут быть и разных знаков, но при этом недостаточные для обеспечения притяжения. Таким образом, можно сделать очевидный вывод, что необходимым условием притяжения одновременно заряженных частиц на малых расстояниях является их взаимная поляризация, обеспечивающая возникновение полных зарядов разных знаков на их поверхностях, обращенных друг к другу.

## 4 Заключение

Рассмотрено взаимодействие диэлектрической сферической частицы и точечного заряда помещённых в электрическое поле и однородный диэлектрик в плазме. Найдены электростатический потенциал, сила и потенциальная энергия взаимодействия, а также момент сил, действующих на макрочастицу. Подробно исследован случай неравномерного распределения заряда и вызванное им вращение пылевых частиц в плазме. Кроме того, рассмотрено взаимодействие двух неравномерно заряженных сферических диэлектрических частиц в присутствии внешнего поля с использованием бисферических координат. Найдено аналитическое выражение для силы взаимодействия. Определены параметры частиц при которых между одноимено заряженными частицами на малых расстояниях наблюдается притяжение.

## Приложение А

Для получения формулы (24) для потенциальной энергии взаимодействия

$$U = - \int F_z dR,$$

требуется вычислить интеграл

$$I = \int \frac{[(n+1)K_{n+1/2}(x) + xK_{n-1/2}(x)]}{x^{\frac{3}{2}}} dx. \quad (97)$$

Используя следующее свойство модифицированных функций Бесселя второго рода (см. например [39]):

$$\frac{d}{dx} [x^n K_n(x)] = -x^n K_{n-1}(x), \quad (98)$$

получим

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(n+1)K_{n+1/2}(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx + \int \frac{x^{n+\frac{1}{2}} K_{(n+1/2)-1}(x)}{x^{n+1}} dx = \\ &= \int \frac{(n+1)K_{n+1/2}(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx + \int \frac{1}{x^{n+1}} \frac{d}{dx} [-x^{n+\frac{1}{2}} K_{n+1/2}(x)] dx = \\ &= \int \frac{(n+1)K_{n+1/2}(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \frac{K_{n+1/2}(x)}{x^{\frac{1}{2}}} - \int -(n+1) \frac{-x^{n+\frac{1}{2}} K_{n+1/2}(x)}{x^{n+2}} dx = \\ &= -\frac{K_{n+1/2}(x)}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

## Приложение В

В этой секции мы покажем как прийти от общей формулы для момента сил (35) к явным выражениям (36-38).

Из (35), принимая во внимание, что

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_r, \quad (99)$$

запишем

$$\mathbf{M} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \{r [E_\theta \mathbf{e}_\varphi - E_\varphi \mathbf{e}_\theta] E_r\} df. \quad (100)$$

Используя связь между базовыми векторами сферической и декартовой систем координат

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}, \quad (101)$$

и выражая вектор напряженности электрического поля через потенциал

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\right), \quad (102)$$

находим, что проекции момента сил на оси координат можно записать в виде:

$$M_x = i\frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \iint \frac{\partial\phi}{\partial r} L_x \phi \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (103)$$

$$M_y = i\frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \iint \frac{\partial\phi}{\partial r} L_y \phi \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (104)$$

$$M_z = i\frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \iint \frac{\partial\phi}{\partial r} L_z \phi \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (105)$$

(Значения всех функций от  $r$  берутся в точке  $a_1$ ). Здесь введен оператор момента импульса из квантовой механики

$$\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla), \quad (106)$$

который имеет следующие проекции на декартовы оси:

$$L_x = i \left( \cos\varphi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} \right), \quad (107)$$

$$L_y = i \left( \sin\varphi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} \right), \quad (108)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (109)$$

При вычислении момента сил вместо представления электростатического потенциала в виде

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_n(r) (Q_n^m \cos m\varphi + \bar{Q}_n^{-m} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta) \quad (110)$$

удобнее использовать его разложение по нормированным сферическим гармоникам

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(r) \tilde{Q}_n^0 Y_n^0(\theta, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n f_n(r) (\tilde{Q}_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) + \tilde{Q}_n^{-m} Y_n^{-m}(\theta, \varphi)), \quad (111)$$

где  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  - сферические гармоники, которые определяются как

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} e^{im\varphi} (-1)^m P_n^m(\cos\theta),$$

$$Y_n^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_n^{m*}(\theta, \varphi),$$

и для которых справедлива нормировка

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \varphi) Y_l^{k*}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{mk} \delta_{nl}. \quad (112)$$

Очевидно, что коэффициенты в (111) выражаются через исходные коэффициенты в (110) таким образом:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n^m &= (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} (Q_n^m - iQ_n^{-m}), \\ \tilde{Q}_n^{-m} &= \sqrt{\frac{\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} (Q_n^m + iQ_n^{-m}), \\ \tilde{A}_n^0 &= \sqrt{\frac{4\pi}{(2n+1)}} Q_n^0. \end{aligned} \quad (113)$$

Сферические гармоники являются собственными функциями оператора  $L_z$ :

$$L_z Y_l^m = m Y_l^m. \quad (114)$$

Действие на сферические гармоники операторов  $L_x$  и  $L_y$  выразим через повышающие и понижающие операторы

$$L_\pm = L_x \pm iL_y, \quad (115)$$

$$L_\pm = e^{\pm i\varphi} \left( i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \pm \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (116)$$

для которых имеют место соотношения:

$$L_\pm Y_l^m = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_l^{m \pm 1}. \quad (117)$$

В нашей задаче о взаимодействии точечного заряда и сферической частицы в плазме потенциал есть сумма трех слагаемых (10), (8), (4)

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \phi_{\text{II}}(r, \theta, \varphi) = \phi_0(r, \theta, \varphi) + \phi_1(r, \theta, \varphi) + \phi_2(r, \theta), \quad (118)$$

которые представляются в виде аналогичном (111):

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \tilde{A}_n^m Y_l^m(\theta, \varphi) + \tilde{A}_n^{-m} Y_l^{-m}(\theta, \varphi) \right) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r})}{\sqrt{r}}, \quad (119)$$

$$f_n^1(r) = \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r})}{\sqrt{r}}, \quad \left. \frac{\partial f_n^1(r)}{\partial r} \right|_{r=a_1} = \frac{n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1) - \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}}, \quad (120)$$

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n^0 Y_l^0(\theta, \varphi) \frac{I_{n+1/2}(\tilde{r})}{\sqrt{r}}, \quad (121)$$

$$f_n^2(r) = \frac{I_{n+1/2}(\tilde{r})}{\sqrt{r}}, \quad \left. \frac{\partial f_n^2(r)}{\partial r} \right|_{r=a_1} = \frac{n I_{n+1/2}(\tilde{a}_1) + \tilde{a}_1 I_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}},$$

$$\tilde{B}_n^0 = \frac{2q_2}{\varepsilon} \sqrt{(2n+1)\pi} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\sqrt{R}}; \quad (122)$$

$$\phi_0(r, \theta, \varphi) = -E_0 r \left[ \tilde{C}_n^0 Y_l^0(\theta, \varphi) + \tilde{C}_n^1 Y_l^1(\theta, \varphi) + \tilde{C}_n^{-1} Y_l^{-1}(\theta, \varphi) \right], \quad (123)$$

$$f_n^0(r) = -r E_0, \quad \tilde{C}_1^0 = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \cos \theta_0, \quad \tilde{C}_1^1 = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sin \theta_0, \quad \tilde{C}_1^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sin \theta_0. \quad (124)$$

То есть все слагаемые представимы в виде

$$\phi_a = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_n^a(r) \left( a_n^m Y_l^m(\theta, \varphi) + a_n^{-m} Y_l^{-m}(\theta, \varphi) \right), \quad a = 0, 1, 2. \quad (125)$$

Поэтому момент сил можно записать как

$$\mathbf{M} = \sum_{a,b} \mathbf{M}_{ab}, \quad a, b = 0, 1, 2. \quad (126)$$

Теперь используя (114), (117) и (112), получим выражения для проекций  $\mathbf{M}_{ab}$  на оси координат.

- для проекции на ось  $x$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{i\varepsilon a_1^2} M_{x_{ab}} &= \iint \frac{\partial \phi_a}{\partial r} L_x \phi_b \sin \theta d\theta d\varphi = \\
&= \iint \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} a_n^m Y_n^m + \frac{\partial f_n^a}{\partial r} a_n^{-m} Y_n^{-m} \right) \right] \times \\
&\times \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left[ f_n^b(r) b_n^m \left( \sqrt{(n-m)(n+m+1)} Y_n^{m+1} + \sqrt{(n+m)(n-m+1)} Y_n^{m-1} \right) + \right. \right. \\
&+ f_n^b(r) b_n^{-m} \left( \sqrt{(n-m)(n+m+1)} Y_n^{-(m+1)} + \sqrt{(n+m)(n-m+1)} Y_n^{-(m-1)} \right) \left. \right] \left\} \sin \theta d\theta d\varphi = \right. \\
&= \frac{1}{2} \iint \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} b_n^m Y_n^m \right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( f_n^b(r) b_n^{-m} \right) \times \\
&\times \left( \sqrt{(n-m)(n+m+1)} Y_n^{-(m+1)} + \sqrt{(n+m)(n-m+1)} Y_n^{-(m-1)} \right) \sin \theta d\theta d\varphi + \\
&+ \frac{1}{2} \iint \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} a_n^{-m} Y_n^{-m} \right) \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( f_n^b(r) b_n^m \right) \left( \sqrt{(n-m)(n+m+1)} Y_n^{m+1} + \sqrt{(n+m)(n-m+1)} Y_n^{m-1} \right) \sin \theta d\theta d\varphi, \\
\\
\frac{4\pi}{i\varepsilon a_1^2} M_{x_{ab}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} a_n^{m-1} \right) \left( f_n^b(r) b_n^{-m} \right) \sqrt{(n+m)(n-m+1)} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{m+1} \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} a_n^{m+1} \right) \left( f_n^b(r) b_n^{-m} \right) \sqrt{(n-m)(n+m+1)} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^m \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} a_n^{-m} \right) \left( f_n^b(r) b_n^{m-1} \right) \sqrt{(n-m+1)(n+m)} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} a_n^{-m} \right) \left( f_n^b(r) b_n^{m+1} \right) \sqrt{(n+m+1)(n-m)} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^m \sqrt{(n+m)(n-m+1)} \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} f_n^b(r) \right) \times \\
&\times \left( a_n^{-m} b_n^{m-1} - a_n^{m-1} b_n^{-m} + a_n^m b_n^{-(m-1)} - a_n^{-(m-1)} b_n^m \right);
\end{aligned}$$

- для проекции на ось  $y$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{i\varepsilon a_1^2} M_{y_{ab}} &= \iint \frac{\partial \phi_a}{\partial r} L_y \phi_b \sin \theta d\theta d\varphi = \\
&= \frac{1}{2i} \iint \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^m Y_l^m \right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (f_n B_n^{-m}) \times \\
&\times \left( -\sqrt{(n-m)(n+m+1)} Y_n^{-(m+1)} + \sqrt{(n+m)(n-m+1)} Y_n^{-(m-1)} \right) \sin \theta d\theta d\varphi + \\
&+ \frac{1}{2i} \iint \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^{-m} Y_l^{-m} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (f_n B_n^m) \times \\
&\times \left( \sqrt{(n-m)(n+m+1)} Y_n^{m+1} - \sqrt{(n+m)(n-m+1)} Y_n^{m-1} \right) \sin \theta d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{i\varepsilon a_1^2} M_{y_{ab}} &= \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^{m-1} \right) (f_n^b B_n^{-m}) \sqrt{(n+m)(n-m+1)} \\
&- \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{m+1} \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^{m+1} \right) (f_n^b B_n^{-m}) \sqrt{(n-m)(n+m+1)} \\
&+ \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^m \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^{-m} \right) (f_n^b B_n^{m-1}) \sqrt{(n-m+1)(n+m)} \\
&- \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^{-m} \right) (f_n^b B_n^{m+1}) \sqrt{(n+m+1)(n-m)} = \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^m \sqrt{(n+m)(n-m+1)} \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} f_n^b \right) \times \\
&\quad (A_n^{-m} B_n^{m-1} - A_n^{m-1} B_n^{-m} - A_n^m B_n^{-(m-1)} + A_n^{-(m-1)} B_n^m);
\end{aligned}$$

- для проекции на ось  $z$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{i\varepsilon a_1^2} M_{z_{ab}} &= \iint \frac{\partial \phi_a}{\partial r} L_z \phi_b \sin \theta d\theta d\varphi = \\
&= \iint \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^m Y_n^m + \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^{-m} Y_n^{-m} \right) \right] \times \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n f_n^b (B_n^m m Y_l^m - B_n^{-m} m Y_l^{-m}) \sin \theta d\theta d\varphi = \\
&= \iint \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^m Y_n^m \right) (-f_n^b B_n^{-m} m Y_l^{-m}) \sin \theta d\theta d\varphi + \\
&+ \iint \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} A_n^{-m} Y_l^{-m} \right) (f_n^b B_n^m m Y_l^m) \sin \theta d\theta d\varphi = \\
&= \iint \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^m m \left( \frac{\partial f_n^a}{\partial r} f_n^b \right) (A_n^{-m} B_n^m - A_n^m B_n^{-m}).
\end{aligned}$$

Видно что, диагональные члены в  $\mathbf{M}_{ab}$  равны нулю. Для суммирования недиагональных членов нам понадобятся соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n^2}{\partial r} f_n(a_1) - \frac{\partial f_n^1}{\partial r} f_n^2(a_1) &= \\ &= \frac{n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1) - \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) I_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}} - \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} \frac{n I_{n+1/2}(\tilde{a}_1) + \tilde{a}_1 I_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}} \\ &= \frac{-\tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1) I_{n+1/2}(\tilde{a}_1) - \tilde{a}_1 I_{n+3/2}(\tilde{a}_1) K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^2} = -\frac{1}{a_1^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n^2}{\partial r} f_n^0(a_1) - \frac{\partial f_n^0}{\partial r} f_n^2(a_1) &= \frac{n K_{n+1/2}(\tilde{a}_1) - \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}} - a_1 E_0 + E_0 \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} = \\ &= -\frac{(n-1) K_{n+1/2}(\tilde{a}_1) - \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} E_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n^1}{\partial r} f_n^0(a_1) - \frac{\partial f_n^0}{\partial r} f_n^1(a_1) &= \frac{n I_{n+1/2}(\tilde{a}_1) + \tilde{a}_1 I_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{a_1^{3/2}} - a_1 E_0 + E_0 \frac{I_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} = \\ &= -\frac{(n-1) I_{n+1/2}(\tilde{a}_1) + \tilde{a}_1 I_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} E_0. \end{aligned}$$

Откуда имеем

$$\begin{aligned} M_x &= i \frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2} \left( \tilde{A}_n^{-1} + \tilde{A}_n^1 \right) B_n^0 \\ &\quad + i \frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-\tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} E_0 \right) \left[ \tilde{C}_1^0 \left( \tilde{A}_1^{-1} + \tilde{A}_1^1 \right) - \tilde{A}_1^0 \left( \tilde{C}_1^{-1} + \tilde{C}_1^1 \right) \right] \\ &\quad - i \frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\tilde{a}_1 I_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} E_0 \right) \left( \tilde{C}_1^{-1} + \tilde{C}_1^1 \right) B_1^0, \quad (127) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2} \left( \tilde{A}_n^{-1} - \tilde{A}_n^1 \right) \tilde{B}_n^0 + \\ &\quad - \frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} E_0 \right) \left[ \tilde{C}_1^0 \left( \tilde{A}_1^{-1} - \tilde{A}_1^1 \right) - \tilde{A}_1^0 \left( \tilde{C}_1^{-1} - \tilde{C}_1^1 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{\tilde{a}_1 I_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} E_0 \right) \left( \tilde{C}_1^{-1} - \tilde{C}_1^1 \right) B_1^0, \quad (128) \end{aligned}$$

$$M_z = i \frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \left( \frac{-\tilde{a}_1 K_{5/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{a_1}} E_0 \right) \left( \tilde{A}_1^{-1} \tilde{C}_1^1 - \tilde{A}_1^1 \tilde{C}_1^{-1} \right). \quad (129)$$

Возвращаясь к исходному представлению потенциалов и используя (17-20), наконец, приходим к выражениям (36-38).

## Приложение С

Для получения выражения (56) воспользуемся подходом, предложенным в работе [54]. Произведение  $R_i^n P_n^m(\cos \theta_i)$  является гармонической функцией, поэтому она может быть представлена в виде:

$$\left(\frac{R_i}{a_i}\right)^n P_n^m(\cos \theta_i) = \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \sum_{l \geq 0} b_{i,l}^{nm} e^{-(l+\frac{1}{2})|\xi|} P_l^m(\cos \eta), \quad i = 1, 2. \quad (130)$$

Здесь  $R_i$  – длина радиус-вектора из центра  $i$ -ой частицы к точке наблюдения,  $\theta_i$  – угол между этим радиус-вектором и положительным направлением оси  $z$ .

Чтобы отыскать искомые коэффициенты разложения  $b_{i,l}^{nm}$ , рассмотрим предел  $\eta \rightarrow 0$ . В этом пределе для  $0 < |\xi| < \xi_i$  имеем:

$$\frac{R_i}{a_i} = (-e^{-\xi_i}) \frac{1 - e^{2\xi_i} e^{-|\xi|}}{1 - e^{-|\xi|}}, \quad \frac{\sin \tilde{\theta}_i}{\sin \eta} = \frac{a_i}{R_i} \frac{\operatorname{sh} \xi_i}{\operatorname{ch} \xi - 1}$$

и, с учетом

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} P_n^m(\cos \eta) = \sin^m \eta P_n^{(m)}(1),$$

выражение (130) принимает вид:

$$\left(\frac{R_i}{a_i}\right)^n \left(\frac{a_i}{R_i} \frac{\operatorname{sh} \xi_i}{\operatorname{ch} \xi - 1}\right)^m P_n^{(m)}(1) = \sqrt{\operatorname{ch} \xi - 1} e^{-\frac{1}{2}|\xi|} \sum_{l \geq 0} b_{i,l}^{nm} e^{-l|\xi|} P_l^{(m)}(1). \quad (131)$$

Здесь  $P_n^{(m)}(1)$  есть  $m$ -ая производная полиномов Лежандра при аргументе, равном единице:

$$P_n^{(m)}(1) = \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!}. \quad (132)$$

Окончательно, разлагая выражение в левой части равенства (131) по степеням  $e^{-|\xi|}$  для коэффициентов  $b_{i,l}^{nm}$  получим выражение (58).

## Приложение D

В этой секции покажем некоторые промежуточные шаги в вычислении выражений для силы взаимодействия между двумя сферическими частицами (78-80).

Во-первых, введём новые переменные:

$$S_l^{\pm m} \equiv \tilde{C}_l^{\pm m} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1} + D_l^{\pm m} e^{(l+\frac{1}{2})\xi_1}, \quad (133)$$

$$Q_l^{\pm m} \equiv (2l+1) G_l^{\pm m} \equiv (2l+1) \left[ -\tilde{C}_l^{\pm m} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1} + D_l^{\pm m} e^{(l+\frac{1}{2})\xi_1} \right]. \quad (134)$$

С помощью этих переменных потенциал поля вне частиц (сумма (52) и (50)), определяемый на поверхности первой частицы, и его производные выражаются так

$$\Psi(\xi, \varphi, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (S_l^m \cos m\varphi + S_l^{-m} \sin m\varphi) P_l^m(\cos \eta), \quad (135)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (Q_l^m \cos m\varphi + Q_l^{-m} \sin m\varphi) P_l^m(\cos \eta), \quad (136)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l m [-S_l^m \sin m\varphi + S_l^{-m} \cos m\varphi] P_l^m(\cos \eta), \quad (137)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (S_l^m \cos m\varphi + S_l^{-m} \sin m\varphi) \frac{\partial}{\partial \eta} P_l^m(\cos \eta). \quad (138)$$

Подставляя потенциал в виде (47) в соотношения (74-76), получим:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\varepsilon} \mathbf{F}_{1x} = & \iint \left\{ \frac{1}{8} \operatorname{sh} \xi_1 \sin^2 \eta \cos \varphi \Psi^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi_1 \sin^2 \eta \cos \varphi \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \eta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \xi_1 \sin^2 \eta \cos \varphi \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta \sin \eta \cos \varphi \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi_1 \sin \varphi \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \\ & \left. + \sin \eta (1 - \operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta) \cos \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + (\operatorname{ch} \xi_1 - \cos \eta) \sin \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right\} d\eta d\varphi, \quad (139) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\varepsilon} \mathbf{F}_{1z} = & \iint \left\{ \frac{1}{8} \sin \eta (1 + \operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta) \Psi^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sin \eta (\operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta - 1) \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \eta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi_1 \sin \eta \cos \eta \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \xi_1 \sin^2 \eta \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \operatorname{sh} \xi_1 \sin^2 \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right\} d\eta d\varphi. \quad (140) \end{aligned}$$

Далее остановимся только на проекциях на оси  $x$  и  $z$ , потому что выражение для проекции на ось  $y$  получается подобно выражению для проекции на ось  $x$ .

После интегрирования по  $\varphi$  получаем ( $\mu = \cos \eta$ ):

- для проекции на ось  $x$

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{\varepsilon} \mathbf{F}_{1x} \times \left( \int_{-1}^1 d\mu \right)^{-1} = \frac{1}{4} \sum_{l,n=0,1}^{\infty} [\operatorname{sh} \xi_1 (-S_l S_n^1 + Q_l Q_n^1) + \operatorname{ch} \xi_1 (S_l Q_n^1 - S_n^1 Q_l)] P_l(\mu) P_n^1(\mu) \sin \eta \\
& + \frac{1}{8} \left\{ \sum_{l,n=1,2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \operatorname{sh} \xi_1 [- (S_l^m S_n^{m+1} + S_l^{-m} S_n^{-(m+1)}) + Q_l^m Q_n^{m+1} + Q_l^{-m} Q_n^{-(m+1)}] + \right. \\
& +(1+2m) \operatorname{ch} \xi_1 [S_l^m Q_n^{m+1} + S_l^{-m} Q_n^{-(m+1)} - (S_n^{m+1} Q_l^m + S_n^{-(m+1)} Q_l^{-m})] \Big\} P_l^m(\mu) P_n^{m+1}(\mu) \sin \eta \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi_1 \left[ 2 \sum_{l,n=1}^{\infty} S_l S_n^1 \frac{\partial}{\partial \eta} P_l(\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^1(\mu) + \sum_{l,n=1,2}^{\infty} \sum_{m=1}^l (S_l^m S_n^{m+1} + S_l^{-m} S_n^{-(m+1)}) \times \right. \\
& \times \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_l^m(\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^{m+1}(\mu) + m(m+1) \frac{P_l^m(\mu) P_n^{m+1}(\mu)}{\sin^2 \eta} \right) \Big] \sin \eta \\
& - \frac{1}{4} \left\{ 2 \sum_{l,n=0,1}^{\infty} (\operatorname{sh} \xi_1 S_l + \operatorname{ch} \xi_1 Q_l) S_n^1 P_l(\mu) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^1(\mu) + \frac{\cos \eta}{\sin \eta} P_n^1(\mu) \right) + \right. \\
& + \sum_{l,n=1,2}^{\infty} \sum_{m=1}^l [\operatorname{sh} \xi_1 (S_l^m S_n^{m+1} + S_l^{-m} S_n^{-(m+1)}) + \operatorname{ch} \xi_1 (Q_l^m S_n^{m+1} + Q_l^{-m} S_n^{-(m+1)})] \times \\
& \times P_l^m(\mu) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^{m+1}(\mu) + (m+1) \frac{\cos \eta}{\sin \eta} P_n^{m+1}(\mu) \right) \Big\} \cos \eta \\
& + \frac{1}{4} \left[ 2 \sum_{l,n=0,1}^{\infty} Q_l S_n^1 P_l(\mu) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^1(\cos \eta) + \frac{\cos \eta}{\sin \eta} P_n^1(\mu) \right) + \right. \\
& + \sum_{l,n=1,2}^{\infty} \sum_{m=1}^l (Q_l^m S_n^{m+1} + Q_l^{-m} S_n^{-(m+1)}) P_l^m(\mu) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^{m+1}(\mu) + (m+1) \frac{\cos \eta}{\sin \eta} P_n^{m+1}(\mu) \right) \Big] \\
& - \frac{1}{4} \left\{ 2 \sum_{l,n=1,0}^{\infty} (\operatorname{sh} \xi_1 S_l^1 + \operatorname{ch} \xi_1 Q_l^1) S_n P_l^1(\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} P_n(\mu) + \right. \\
& + \sum_{l,n=2,1}^{\infty} \sum_{m=1}^n [\operatorname{sh} \xi_1 (S_l^{m+1} S_n^m + S_l^{-(m+1)} S_n^{-m}) + \operatorname{ch} \xi_1 (Q_l^{m+1} S_n^m + Q_l^{-(m+1)} S_n^{-m})] \times \\
& \times P_l^{m+1}(\mu) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^m(\mu) - m \frac{\cos \eta}{\sin \eta} P_n^m(\mu) \right) \Big\} \cos \eta + \frac{1}{2} \sum_{l,n=1,0}^{\infty} Q_l^1 S_n P_l^1(\cos \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} P_n(\cos \eta) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{l,n=2,1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (Q_l^{m+1} S_n^m + Q_l^{-(m+1)} S_n^{-m}) P_l^{m+1}(\mu) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^m(\mu) - m \frac{\cos \eta}{\sin \eta} P_n^m(\mu) \right);
\end{aligned}$$

- для проекции на ось  $z$

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{\varepsilon} \mathbf{F}_{1z} \times \left( \int_{-1}^1 d\mu \right)^{-1} = \frac{1}{8} \sum_{l,n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (S_l^m S_n^m + S_l^{-m} S_n^{-m} - Q_l^m Q_n^m + Q_l^{-m} Q_n^{-m}) P_l^m(\mu) P_n^m(\mu) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{l,n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[ \frac{1}{2} \operatorname{ch} \xi_1 (S_l^m S_n^m + S_l^{-m} S_n^{-m} + Q_l^m Q_n^m + Q_l^{-m} Q_n^{-m}) + \right. \\
& \quad \left. + \operatorname{sh} \xi_1 (S_l^m Q_n^m + S_l^{-m} Q_n^{-m}) \right] \cos \eta P_l^m(\mu) P_n^m(\mu) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l,n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (S_l^m S_n^m + S_l^{-m} S_n^{-m}) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_l^m(\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^m(\mu) + \frac{m^2}{\sin^2 \eta} P_l^m(\mu) P_n^m(\mu) \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l,n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \operatorname{ch} \xi_1 (S_l^m S_n^m + S_l^{-m} S_n^{-m}) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} P_l^m(\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^m(\mu) + \frac{m^2}{\sin^2 \eta} P_l^m(\mu) P_n^m(\mu) \right) \cos \eta \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l,n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [\operatorname{ch} \xi_1 (S_l^m S_n^m + S_l^{-m} S_n^{-m}) + \operatorname{sh} \xi_1 (Q_l^m S_n^m + Q_l^{-m} S_n^{-m})] \sin \eta P_l^m(\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} P_n^m(\mu).
\end{aligned}$$

После интегрирования по  $\eta$  получаем:

- для проекции на ось  $x$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\varepsilon} \mathbf{F}_{1x} = & \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) (-S_{l-1} S_l^1 + G_{l-1} G_l^1) \\
& + \frac{1}{4} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \left[ - \left( S_{l-1}^m S_l^{m+1} + S_{l-1}^{-m} S_l^{-(m+1)} \right) + G_{l-1}^m G_l^{m+1} + G_{l-1}^{-m} G_l^{-(m+1)} \right] \\
& \quad + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \xi_1 \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) (S_{l-1} G_l^1 - S_l^1 G_{l-1}) \\
& + \frac{1}{4} \operatorname{ch} \xi_1 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \left[ S_{l-1}^m G_l^{m+1} + S_{l-1}^{-m} G_l^{-(m+1)} - \left( S_l^{m+1} G_{l-1}^m + S_l^{-(m+1)} G_{l-1}^{-m} \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) (-S_{l+1} S_l^1 + G_{l+1} G_l^1) \\
& - \frac{1}{4} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \left[ - \left( S_{l+1}^m S_l^{m+1} + S_{l+1}^{-m} S_l^{-(m+1)} \right) + G_{l+1}^m G_l^{m+1} + G_{l+1}^{-m} G_l^{-(m+1)} \right] \\
& \quad + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \xi_1 \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) (S_{l+1} G_l^1 - S_l^1 G_{l+1}) \\
& + \frac{1}{4} \operatorname{ch} \xi_1 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \left[ S_{l+1}^m G_l^{m+1} + S_{l+1}^{-m} G_l^{-(m+1)} - \left( S_l^{m+1} G_{l+1}^m + S_l^{-(m+1)} G_{l+1}^{-m} \right) \right] \\
& \quad + \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) (G_l S_l^1 - G_l^1 S_l) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \left( G_l^m S_l^{m+1} + G_l^{-m} S_l^{-(m+1)} - G_l^{m+1} S_l^m - G_l^{-(m+1)} S_l^{-m} \right);
\end{aligned}$$

- для проекции на ось  $z$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\varepsilon} \mathbf{F}_{1z} = & \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1) \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (S_n^m S_n^m + S_n^{-m} S_n^{-m} - G_n^m G_n^m + G_n^{-m} G_n^{-m}) \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{(n-m-1)!} \left[ (S_{n-1}^m G_n^m + S_{n-1}^{-m} G_n^{-m}) - (S_n^m G_{n-1}^m + S_n^{-m} G_{n-1}^{-m}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{(n-m-1)!} \left[ - (S_{n-1}^m S_n^m + S_{n-1}^{-m} S_n^{-m}) + G_{n-1}^m G_n^m + G_{n-1}^{-m} G_n^{-m} \right].
\end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным коэффициентам используя (133, 134) получаем формулы (78-80).

## Приложение Е

Все интегралы встречающиеся в данной работе сводятся к интегралу ( $\mu = \cos \eta$ )

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_l^m(\mu) d\mu = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,n}, \quad (141)$$

если воспользоваться базовыми свойствами присоединенных полиномов Лежандра [37, 42, 49]

$$(2n+1) \mu P_n^m(\mu) = (n+m) P_{n-1}^m(\mu) + (n+m+1) P_{n+1}^m(\mu), \quad (142)$$

$$\sin \eta P_n^m(\mu) = \frac{(n+m)(n+m-1)}{(2n+1)} P_{n-1}^{m-1}(\mu) - \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)} P_{n+1}^{m-1}(\mu), \quad (143)$$

$$(2n+1) \sin \eta P_n^m(\mu) = P_{n+1}^{m+1}(\mu) - P_{n-1}^{m+1}(\mu), \quad (144)$$

$$\frac{\mu P_n^m(\mu)}{\sin \eta} = \frac{1}{2m} [P_n^{m+1}(\mu) + (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(\mu)], \quad (145)$$

$$\frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \eta} = \frac{1}{2} [-P_n^{m+1}(\varrho) + (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(\mu)]. \quad (146)$$

## Список литературы

- [1] V. E. Fortov, A. G. Khrapak, S. A. Khrapak, V. I. Molotkov, O. F. Petrov, *Dusty plasmas*, Physics-Uspekhi **47**, 447 (2004).
- [2] G. E. Morfill, A. V. Ivlev, *Complex plasmas: An interdisciplinary research field*, Rev. Mod. Phys. **81**, 1353 (2009).
- [3] P. K. Shukla, B. Eliasson, *Colloquium : Fundamentals of dust-plasma interactions*, Rev. Mod. Phys. **81**, 25 (2009).
- [4] V. N. Tsytovich, *Dust plasma crystals, drops, and clouds*, Physics-Uspekhi **40**, 53 (1997).
- [5] S. V. Vladimirov, K. Ostrikov, A. A. Samarian, *Physics and applications of complex plasmas*, Imperial College Press (2005).
- [6] J. Q. Feng, *Electrostatic interaction between two charged dielectric spheres in contact*, Phys. Rev. E **62**, 2891 (2000).
- [7] M. T. Neves-Petersen, S. B. Petersen, *Protein electrostatics: A review of the equations and methods used to model electrostatic equations in biomolecules – applications in biotechnology*, Biotechnology Annual Review **9**, 315 (2003).
- [8] M. C. Van Loosdrecht, J. Lyklema, W. Norde, G. Schraa, A. J. Zehnder, *Electrophoretic mobility and hydrophobicity as a measured to predict the initial steps of bacterial adhesion*, Applied and Environmental Microbiology **53**, 1898 (1987).
- [9] R. Allen, S. Melchionna, J.-P. Hansen, *Intermittent permeation of cylindrical nanopores by water*, Phys. Rev. Lett. **89**, 175502 (2002).
- [10] R. Allen, J.-P. Hansen, *Density functional approach to the effective interaction between charges within dielectric cavities*, Journal of Physics: Condensed Matter **14**, 11981 (2002).
- [11] P. C. Chaumet, J. P. Dufour, *Electric potential and field between two different spheres*, J. Electrostatics **43**, 145 (1998).
- [12] A. Goyette, A. Navon, *Two dielectric spheres in an electric field*, Phys. Rev. B **13**, 4320 (1976).
- [13] H. M. Ymeri, *Exact analytical solution of the problem of two dielectric spheres in the uniform electrostatic field*, Electrical Engineering **80**, 227 (1997).
- [14] Y. Nakajima, T. Sato, *Calculation of electrostatic force between two charged dielectric spheres by the re-expansion method*, J. Electrostatics **45**, 213 (1999).

- [15] E. Bichoutskaia, A. L. Boatwright, A. Khachatourian, A. J. Stace, *Electrostatic analysis of the interactions between charged particles of dielectric materials.*, J. Chem. Phys. **133**, 024105 (2010).
- [16] J. P. Huang, K. W. Yu, G. Q. Gu, *Electrorotation of a pair of spherical particles*, Phys. Rev. E **65**, 021401 (2002).
- [17] I. V. Lindell, J. C.-E. Sten, K. I. Nikoskinen, *Electrostatic image method for the interaction of two dielectric spheres*, Radio Science **28**, 319 (1993).
- [18] H. Ohshima, *Electrostatic interaction between two dissimilar spheres with constant surface charge density*, Journal of Colloid and Interface Science **170**, 432 (1995).
- [19] D. M. York, M. Karplus, *A smooth solvation potential based on the conductor-like screening model*, The Journal of Physical Chemistry A **103**, 11060 (1999).
- [20] M.-S. Chun, W. Bowen, *Rigorous calculations of linearized poisson–boltzmann interaction between dissimilar spherical colloids and osmotic pressure in concentrated dispersions*, Journal of Colloid and Interface Science **272**, 330 (2004).
- [21] V. A. Saranin, V. V. Mayer, *Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya vzaimodeistviya dvukh provodyashchikh zaryazhennykh sharov*, Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180**, 1109 (2010).
- [22] M. H. Davis, *Two charged spherical conductors in a uniform electric field: forces and field strength*, Q. J. Mech. Appl. Math. **17**, 499 (1964).
- [23] A. V. Khachatourian, A. O. Wistrom, *Evaluation of the coulomb force via the fredholm integral equation*, J. Phys. A: Math. Theor. **33**, 307 (1999).
- [24] A. V. Khachatourian, A. O. Wistrom, *Size effects in aerosol electrostatic interactions*, J. Colloid. Interf. Sci. **242**, 52 (2001).
- [25] K. Kolikov, D. Ivanov, G. Krastev, Y. Epitropov, S. Bozhkov, *Electrostatic interaction between two conducting spheres*, J. Electrostatics **70**, 91 (2012).
- [26] A. Russell, *The coefficients of capacity and the mutual attractions or repulsions of two electrified spherical conductors when close together*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **82**, 524 (1909).
- [27] J. Lekner, *Electrostatic force between two conducting spheres at constant potential difference*, J. Appl. Phys. **111**, 076102 (2012).
- [28] А. В. Филиппов, *Влияние размера макрочастич на их электростатическое взаимодействие в плазме*, ЖЭТФ **136**, 601 (2009).

- [29] J. Lekner, *Electrostatics of two charged conducting spheres*, Proc. R. Soc. A **468**, 2829 (2012).
- [30] J. Lekner, *Polarizability of two conducting spheres*, J. Electrostatics **69**, 435 (2011).
- [31] J. Lekner, *Capacitance coefficients of two spheres*, J. Electrostatics **69**, 11 (2011).
- [32] J. Lekner, *Near approach of two conducting spheres: Enhancement of external electric field*, J. Electrostatics **69**, 559 (2011).
- [33] J. Lekner, *Analytical expression for the electric field enhancement between two closely-spaced conducting spheres*, J. Electrostatics **68**, 299 (2010).
- [34] A. Moussiaux, A. Ronveaux, *Electrostatic capacity of two unequal adhering spheres*, Journal of Physics A: Mathematical and General **12**, 423 (1979).
- [35] С. И. Гращенков, *О силе электростатического взаимодействия между двумя проводящими шарами*, ЖТФ **81**, 13 (2011).
- [36] G. B. Jeffery, *On a form of the solution of laplace's equation suitable for problems relating to two spheres*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A **87**, 109 (1912).
- [37] В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Москва (2002).
- [38] P. Debye, E. Hückel, *Zur theorie der elektrolyte*, Phys. Zeitschr **24**, 185 (1923).
- [39] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Иностранный литература, Москва (1949). [G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, London (1922)].
- [40] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Статистическая физика. Часть 1*, Физматлит, Москва (2002).
- [41] А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. С. Иванов, *Электростатическое взаимодействие двух макрочастиц в модели пуассона-болтьман*, Письма в ЖЭТФ **83**, 640 (2006).
- [42] Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, Иностранный литература, Москва (1952). [E. W. Hobson, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Univ. Press, Cambridge (1931)].
- [43] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
- [44] N. Sato, *Spinning motion of fine particles in plasmas*, AIP Conference Proceedings **799**, 97 (2005).

- [45] S. I. Krasheninnikov, *On dust spin up in uniform magnetized plasma*, Physics of Plasmas **13**, 114502 (2006).
- [46] S. I. Krasheninnikov, V. I. Shevchenko, P. K. Shukla, *Spinning of a charged dust particle in a magnetized plasma*, Physics Letters A **361**, 133 (2007).
- [47] Е. С. Дзлиева, В. Ю. Карасев, О. Ф. Петров, *Прямое наблюдение динамики уединенных пылевых волчков в комплексной плазме в слабом магнитном поле*, ЖЭТФ **141**, 189 (2012).
- [48] P. S. Epstein, *On the resistance experienced by spheres in their motion through gases*, Phys. Rev. **23**, 710 (1924).
- [49] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw Hill, New York (1953).
- [50] А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, Москва (1978).
- [51] A. V. Filippov, *Electrostatic interaction of spherical microparticles in dusty plasmas*, Contributions to Plasma Physics **49**, 433 (2009).
- [52] W. R. Smythe, *Static and dynamic electricity*, McGraw-Hill, New York (1950).
- [53] W. Thomson, *On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors*, Philosophical Magazine Series 4 **6**, 114 (1853).
- [54] M. S. Ingber, A. Zinchenko, *Semi-analytic solution of the motion of two spheres in arbitrary shear flow*, Int. J. Multiphase Flow **42**, 152 (2012).